

文章编号:1001-5132 (2010) 02-0047-05

基于分位数过程能力指数的 Bootstrap 置信区间

许家清

(绍兴文理学院 数学系, 浙江 绍兴 312000)

摘要: 讨论了基于分位数过程能力指数的 Bootstrap 置信区间, 并以 Taguchi 指数 C'_{pm} 为例, 在过程服从 Weibull 分布情况下给出了指数 C'_{pm} 的 Bootstrap 置信区间的求法, 通过模拟研究验证了该方法的可行性.

关键词: 分位数; 过程能力指数; 极大似然估计; Bootstrap 置信区间

中图分类号: O213.2

文献标识码: A

在制造业中, 过程的产出量、过程的期望损失和过程能力指数(PCI)构成了衡量生产过程潜在和当前能力水平的重要指标, 而其中的过程能力指数为制造能力水平提供了一个数值上的度量, 工程师或管理者能方便地利用这一数量值来判断生产过程中产品满足预设规格限的能力, 一个超结构的过程能力指数定义为^[1]:

$$C_p(u, v) = (d - u|\mu - m|) / (3(\sigma^2 + v(\mu - T)^2)^{1/2}),$$

其中 μ 是过程均值; σ 是过程的标准差; $d = (USL - LSL)/2$ 是规格区间的半长; $m = (USL + LSL)/2$ 是上下规格限的中点; T 是目标值; $u, v \geq 0$.

u, v 的不同取值可得常用的 4 个 PCI:

$$C_p(0, 0) = C_p,$$

$$C_p(1, 0) = C_{pk},$$

$$C_p(0, 1) = C_{pm},$$

$$C_p(1, 1) = C_{pmk}.$$

通常情况下总是假设上述过程指标 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 但在现实世界中一些过程指标往往不满足正态性的假设, 此时 6σ 原则显然不再有效. 设 X 的分布函数为 $F(x, \theta)$, 有密度函数为

$f(x, \theta)$, ξ_α 为 $F(x, \theta)$ 的 α 分位点, Clements^[2]提出了如下修改的 PCI:

$$C_{Np}(u, v) = (d - u|\xi_{0.5} - m|) / (3(((\xi_{0.99865} - \xi_{0.00135}) / 6)^2 + v(\xi_{0.5} - T)^2)^{1/2}).$$

当过程是正态时, $C_{Np}(u, v)$ 退化为 $C_p(u, v)$. 在过程指标 X 的分布已知或检验是 100% 时, PCI 的计算是显而易见的, 但在一般情况下过程中的参数值是无法精确知道的, 往往需根据抽取的样本数据进行估计.

1 过程能力指数估计

过程能力指数的点估计不难由统计方法求得. 设过程指标 X 的分布函数为 $F(x, \theta)$, 有密度函数为 $f(x, \theta)$, X_1, X_2, \dots, X_n 为一个样本, 当 $F(x, \theta)$ 为 $N(\mu, \sigma^2)$ 时, $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i / n$, $S_n^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 / (n-1)$ 分别为 μ 和 σ^2 的极大似然估计(MLE), 同时, 在非正态情形下容易由样本数据获得未知参数和过程分位数的 MLE, 并且它们都是相合估计, 由此可得指

数的 MLE.

过程能力指数的置信区间和假设检验则较为复杂, 在正态性假设下, $C_p(u, v)$ 的置信限和假设检验均有比较成熟的结论^[3-5], 如没有正态性假设, 它们的置信限则不易得到, 不失一般性, 以

$$C_{Np}(0, 1) = C'_{pm} = d / (3(((\xi_{0.99865} - \xi_{0.00135}) / 6)^2 + (\xi_{0.5} - T)^2)^{1/2})$$

为例, 利用未知参数的 MLE 可得 $F(x, \theta)$ (未知参数 $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_r)^T$) 的 α 分位点 ξ_α 的 MLE $\hat{\xi}_\alpha(\hat{\theta})$, 由此可得指数的 MLE 为:

$$\hat{C}'_{pm} = d / (3(((\hat{\xi}_{0.99865}(\hat{\theta}) - \hat{\xi}_{0.00135}(\hat{\theta})) / 6)^2 + (\hat{\xi}_{0.5}(\hat{\theta}) - T)^2)^{1/2}).$$

可以证明^[6]:

$n^{1/2}(\hat{C}'_{pm} - C'_{pm}) \xrightarrow{\cdot} N(0, \Omega)$, (“ $\xrightarrow{\cdot}$ ”表示渐近服从)其中:

$$\Omega = W^T(\theta)R(\theta)I^{-1}(\theta)R^T(\theta)W(\theta),$$

$$W(\theta) = \left(\frac{\partial C'_{pm}}{\partial \xi_{p_1}}, \frac{\partial C'_{pm}}{\partial \xi_{p_2}}, \frac{\partial C'_{pm}}{\partial \xi_{p_3}} \right)^T,$$

$$R(\theta) = \left(\frac{\partial \xi_{p_1}}{\partial \theta}, \frac{\partial \xi_{p_2}}{\partial \theta}, \frac{\partial \xi_{p_3}}{\partial \theta} \right)^T,$$

$$\frac{\partial \xi_{p_i}}{\partial \theta} = \left(\frac{\partial \xi_{p_i}}{\partial \theta_1}, \dots, \frac{\partial \xi_{p_i}}{\partial \theta_r} \right)^T,$$

$I(\theta)$ 为对应的 Fisher 信息阵, a^T 表示向量 a 的转置. 方差 Ω 的相合估计为:

$$\hat{\Omega} = W^T(\hat{\theta})R(\hat{\theta})I^{-1}(\hat{\theta})R^T(\hat{\theta})W(\hat{\theta}),$$

其中 $I(\hat{\theta}) = -(1/n)\partial^2 \ln L(\theta) / (\partial \theta^T \partial \theta)|_{\theta=\hat{\theta}}$, 在满足一些正则条件下为 $I(\theta)$ 的相合估计, 由此可得到 C'_{pm} 的 $100(1-\alpha)\%$ 近似置信限和检验统计量. 大样本性质对样本容量 n 要求较高, 笔者用 Bootstrap 方法求 $C_{Np}(u, v)$ 的置信区间, 并以 $C_{Np}(0, 1) = C'_{pm}$ 为例给出了模拟结果.

2 Bootstrap 置信区间

Bootstrap 方法是 Efron^[7-8]提出的一个统计模拟方法, 它的本质是从经验分布函数中进行重复

抽样, 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是从过程 X 中抽取的容量为 n 的样本, 称之为原始样本, 由原始样本得到的经验分布函数记为 $F_n(x)$, 从 $F_n(x)$ 中抽取的样本称为 Bootstrap 样本, 记为 $X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*$. 显然, 可能抽取的 Bootstrap 样本数为 n^n 个, 利用这些 Bootstrap 样本进行统计推断称为 Bootstrap 统计方法. 对过程能力指数 C'_{pm} , 由原始样本 X_1, X_2, \dots, X_n 获得的估计记为 \hat{C}'_{pm} , 假设从中抽取了 B 个 Bootstrap 样本, 由此得 C'_{pm} 的 B 个 Bootstrap 估计 \hat{C}^*_{pmi} , $i=1, 2, \dots, B$. 利用 Bootstrap 方法可得到 C'_{pm} 的 4 种 Bootstrap 置信区间:

2.1 SB (Standard Bootstrap)置信区间

记 $\hat{C}^*_{pm} = \sum_{i=1}^B \hat{C}^*_{pmi} / B$, $S^*_{C_{pm}} = (\sum_{i=1}^B (\hat{C}^*_{pmi} - \hat{C}^*_{pm})^2 / (B-1))^{1/2}$, 在满足近似正态性条件下, C'_{pm} 的 $(1-\alpha) \cdot 100\%$ SB 置信区间为:

$$(\hat{C}^*_{pm} - u_{\alpha/2} S^*_{C_{pm}}, \hat{C}^*_{pm} + u_{\alpha/2} S^*_{C_{pm}}),$$

其中 $u_{\alpha/2}$ 为 $N(0, 1)$ 的 $\alpha/2$ 上侧分位点.

2.2 PB (Percentile Bootstrap)置信区间

对 \hat{C}^*_{pmi} $i=1, 2, \dots, B$ 按升序排列得到 $\hat{C}^*_{pm(i)}$ $i=1, 2, \dots, B$, 则 C'_{pm} 的 $(1-\alpha)100\%$ PB 置信区间为:

$$(\hat{C}^*_{pm}([\alpha B / 2]), \hat{C}^*_{pm}([(1-\alpha/2)B])),$$

其中 $[x]$ 表示对 x 取整.

2.3 BCPB (Biased-corrected Percentile Bootstrap)置信区间

Bootstrap 分布可能是一个有偏分布而非对称, 这就会导致置信区间偏左或偏右, 文献[8]给出了一个修正偏度的方法.

首先确定 i , 使得 $\hat{C}^*_{pm(i)} \leq \hat{C}'_{pm} \leq \hat{C}^*_{pm(i+1)}$, 记 $P_0 = i/B$ 作为 $P(\hat{C}^*_{pm(i)} \leq \hat{C}'_{pm})$ 的估计值, 其次计算 $z_0 = \Phi^{-1}(P_0)$ 用来度量 Bootstrap 的偏度, 并得到修正后的分位点水平, $P_L = \Phi(2z_0 - z_{\alpha/2})$, $P_U = \Phi(2z_0 + z_{\alpha/2})$, 最后得 $(1-\alpha)100\%$ BCPB 置信区间为:

$$(\hat{C}^*_{pm}([P_L B]), \hat{C}^*_{pm}([P_U B])),$$

其中 $\Phi(\cdot)$ 表示标准正态分布的分布函数.

2.4 BC_a (Accelerated Bias-corrected Percentile) 置信区间

P_0 和 z_0 计算同 2.3 节中所述, 分位点水平取为:

$$P_{AL} = \Phi \left(z_0 + \frac{z_0 - z_{\alpha/2}}{1 - a(z_0 - z_{\alpha/2})} \right),$$

$$P_{AU} = \Phi \left(z_0 + \frac{z_0 + z_{\alpha/2}}{1 - a(z_0 + z_{\alpha/2})} \right),$$

其中,

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{C}_{pm}(\cdot) - \hat{C}_{pm}(i))^3}{6 \left(\sum_{i=1}^n (\hat{C}_{pm}(\cdot) - \hat{C}_{pm}(i))^2 \right)^{3/2}},$$

$\hat{C}_{pm}(i)$ 是由第 i 个 jackknife 样本(原始样本中去掉第 i 个样本点后的样本)得到的 jackknife 估计. $\hat{C}_{pm}(\cdot)$ 是 $\hat{C}_{pm}(i)$ 的均值. 那么, $(1-\alpha)100\%$ BC_a 置信区间为:

$$(\hat{C}_{pm}^*([P_{AL}B]), \hat{C}_{pm}^*([P_{AU}B])).$$

BC_a 置信区间在理论上有许多好的性质^[7], 特别是参数统计推断中有较高的精度^[9], 因此当样本量满足一定要求时(通常为 $n \geq 30$), 常以 BC_a 方法来构造 C'_{pm} 的 Bootstrap 置信区间.

3 模拟研究

假设过程指标 X 服从 Weibull 分布, 其分布函

数和密度函数分别为:

$$F(x; m, \eta) = \begin{cases} 1 - \exp(-(x/\eta)^m), & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

$$f(x; m, \eta) = \begin{cases} mx^{m-1} / \eta^m \exp(-(x/\eta)^m), & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

令 $\theta = (m, \eta)'$, 由

$$\alpha = F(\xi_\alpha, \theta) = 1 - e^{-(\xi_\alpha/\eta)^m} \Rightarrow$$

$$\xi_\alpha = \eta e^{1/m \ln \ln 1/(1-\alpha)}.$$

设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自 X 的样本, $\theta = (m, \eta)'$ 的 MLE 为 $\hat{\theta} = (\hat{m}, \hat{\eta})'$, $F(x)$ 的 α 分位点 ξ_α 的 MLE 为 $\hat{\xi}_\alpha = \hat{\eta} e^{1/\hat{m} \ln \ln 1/(1-\alpha)}$, 由此得 C'_{pm} 的 MLE 为:

$$\hat{C}'_{pm} = (USL - LSL) / (6(((\hat{\xi}_{p_3} - \hat{\xi}_{p_1})/6)^2 + (\hat{\xi}_{p_2} - T)^2)^{1/2}),$$

其中 $p_1 = 0.00135, p_2 = 0.5, p_3 = 0.99865$.

取真值 $m = 4, \eta = 4.2$, 由此计算得到过程能力指数的真值为 $C'_{pm} = 1.090$. 样本容量 n 分别取 10, 20, 30, 50, 60, 100, 150; $avl1, sdvl1, rcov1$ 分别为 1000 次模拟中第 i 种 Bootstrap 置信区间的平均长度, 标准差和置信区间覆盖真值的比例, $i = 1, 2, 3, 4$, 置信水平设定为 95%.

计算结果见表 1. 从模拟结果看, 无论是小样本($n = 10$)还是大样本, Bootstrap 置信区间的覆盖率均能达到置信水平的要求, 其中 $n = 10$ 时, SB 置信区间明显优于其他 Bootstrap 置信区间, 而随着

表 1 模拟结果

n	10	20	30	50	60	100	150
$avl1$	1.078	0.664	0.523	0.396	0.360	0.274	0.223
$avl2$	1.046	0.660	0.522	0.396	0.360	0.274	0.223
$avl3$	1.150	0.711	0.558	0.419	0.379	0.286	0.231
$avl4$	1.255	0.778	0.606	0.449	0.404	0.301	0.240
$sdvl1$	0.528	0.200	0.116	0.065	0.060	0.033	0.023
$sdvl2$	0.493	0.198	0.115	0.066	0.060	0.033	0.023
$sdvl3$	0.744	0.286	0.171	0.096	0.082	0.047	0.032
$sdvl4$	0.780	0.306	0.183	0.103	0.089	0.052	0.034
$rcov1$	0.945	0.937	0.935	0.945	0.951	0.951	0.937
$rcov2$	0.852	0.897	0.926	0.934	0.938	0.950	0.929
$rcov3$	0.860	0.916	0.938	0.945	0.945	0.951	0.935
$rcov4$	0.887	0.945	0.959	0.955	0.952	0.959	0.945

样本容量的增加, BC_α 置信区间的覆盖率迅速提高并且较稳定, 区间的平均宽度也基本与其他 Bootstrap 置信区间接近, 所以在实际操作中可择优选用.

4 例子

下面的数据是由一个稳定过程产生的容量为 100 的一个样本^[10], 规格控制上限 $USL = 1.03$, 下限 $LSL = 0.00$, $T = 0.4$, 样本均值为 $\hat{\mu} = 0.406$, 样本标准差为 $\hat{\sigma} = 0.173$.

0.684, 0.347, 0.527, 0.572, 0.231, 0.388, 0.221, 0.577, 0.660, 0.685, 0.261, 0.345, 0.376,

0.779, 0.624, 0.198, 0.425, 0.513, 0.415, 0.335, 0.557, 0.274, 0.401, 0.447, 0.359, 0.461,

0.486, 0.517, 0.202, 0.388, 0.107, 0.838, 0.414, 0.721, 0.193, 0.423, 0.637, 0.350, 0.390,

0.350, 0.393, 0.626, 0.159, 0.559, 0.321, 0.175, 0.330, 0.503, 0.570, 0.348, 0.512, 0.178,

0.140, 0.408, 0.571, 0.488, 0.271, 0.653, 0.235, 0.543, 0.587, 0.136, 0.520, 0.119, 0.486,

0.330, 0.553, 0.460, 0.422, 0.286, 0.478, 0.374, 0.432, 0.185, 0.550, 0.325, 0.259, 0.221,

0.147, 0.543, 0.290, 0.319, 0.229, 0.165, 0.598, 0.179, 0.199, 0.306, 0.553, 0.374, 0.191,

0.234, 0.715, 0.572, 0.376, 0.648, 0.206, 0.172, 0.641, 0.591

既然生产过程是统计受控的, 其生产合格品能力的大小应在 2 级以上, 相应得到的过程能力指数不应小于 1. 由统计软件(R 软件)容易得到数据直方图(图 1).

同时 Shapiro-Wilk 正态性检验的 p 值为 0.035, 从而认定是非正态的.

如果按正态性假设可计算得:

$$\hat{C}'_{pm} = d / (3(\hat{\sigma}^2 + (\hat{\mu} - T)^2)^{1/2}) = 0.84 < 1,$$

得出了生产过程能力不足的错误结论, 原因是过程

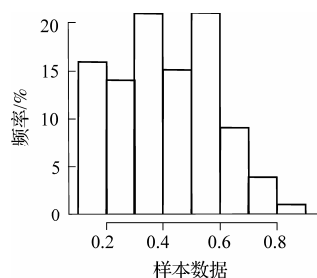


图 1 样本数据的直方图

的非正态性.

利用修正后的 PCI(基于分位数的过程能力指数)可计算得:

$$\begin{aligned} \hat{C}'_{pm} &= (USL - LSL) / \\ & (6(((\hat{\xi}_{0.99865} - \hat{\xi}_{0.00135}) / 6)^2 + (\hat{\xi}_{0.5} - T)^2)^{1/2}) = \\ & 1.42 > 1. \end{aligned}$$

显示过程是正常的, 特别由指数 $C'_{pm} = 1.42$ 进一步得出过程是相当优的(属于一级, 即过程能力充足), 其实从样本数据可以看出, 所有数据均落在 $[LSL, USL]$ 内.

进一步, 利用本文的结论可以计算出过程能力指数 C'_{pm} 的 95% BC_α 置信区间为: $[1.3057, 1.7288]$, 为生产商提供了更加可信的过程能力描述.

5 结论

过程能力指数是度量过程运行能力的一个实用而有效的工具, 从某些意义上来说指数的置信区间相对于点估计而言更具说服力, 但较难得到. 利用 Bootstrap 方法讨论了基于分位数过程能力指数的 Bootstrap 置信区间的求法, 通过模拟研究证实了方法的可操作性, 计算的程序可向作者索取. 值得指出的是在过程服从其他分布或非参数情形时, 有关指数的近似置信限均可类似得到.

参考文献:

- [1] Vannman K. A unified approach to capability indices[J]. Stat Sin, 1995(5):805-820.
- [2] Clements J A. Process capability calculations for non-

- normal distributions[J]. Quality Progress, 1989, 22:95-100.
- [3] Kushler R H, Hurley P. Confidence bounds for capability indices[J]. J Qual Tech, 1992, 20(3):162-175.
- [4] Pearn W L, Kotz S, Johnson N L. Distributional and inferential properties of process capability indices[J]. J Qual Tech, 1992, 24(4):216-231.
- [5] Vannman K. Distribution and moments in simplified form for a general class of capability indices[J]. Comm St Th, 1997, 26(1):159-179.
- [6] 陈希儒. 数理统计引论[M]. 北京: 科学出版社, 1981.
- [7] Efron B, Tibshirani R. An introduction to the Bootstrap [M]. London: Chapman & Hall, 1993.
- [8] Efron B. Better Bootstrap confidence intervals[J]. Journal of American Statistical Association, 1987, 82:171-185.
- [9] Shao J, Tu D. The Jackknife and Bootstrap[M]. New York: Springer, 1995.
- [10] Alan M Polansky. A smooth nonparametric approach to process capability[J]. Quality and Reliability Engineering International, 1998, 14:43-48.

Bootstrap Confidence Intervals of Quantile-based Process Capability Indices

XU Jia-qing

(Department of Mathematics, Shaoxing University, Shaoxing 312000, China)

Abstract: This paper discusses the confidence intervals of process capability indices. The Bootstrap method of constructing the confidence intervals of quantile-based process capability indices is proposed, and a study based on simulation is taken to evaluate the performance of four kinds of Bootstrap confidence intervals of C'_{pm} for Weibull process distribution. The results show that the Bootstrap method is feasible and effective.

Key words: quantiles; process capability indices; maximum likelihood estimate; Bootstrap confidence intervals

CLC number: O213.2

Document code: A

(责任编辑 史小丽)