文章编号:1001-5132（2010）01-0064-05

广义有界变差函数的复合

吴伟燕, 俞国华*

（宁波大学 理学院, 浙江 宁波 315211）

摘要: 研究了 $\Lambda BV^{(p)}(I)$ 和 ΛBMV 函数的复合, 给出一个函数与 $\Lambda BV^{(p)}(I)$ 或 ΛBMV 的函数复合后仍为 $\Lambda BV^{(p)}(I)$ 或 ΛBMV 的充要条件; 同时根据 $MV[v]$ 的定义, 给出了 $MV[v]$ 函数复合的充要条件.

关键词: p-Λ 有界变差函数; Λ 平均有界变差函数; 复合函数; Lipschitz 条件

中图分类号: O174.2 文献标识码: A

自从 20 世纪 70 年代以来, 各种广义的有界变差函数相继被提出, 广义有界变差函数的研究已成为数学工作者感兴趣的研究课题之一. 不少学者对广义有界变差函数的性质及其在 Fourier 级数中的应用进行了大量的研究, 并得到了许多有意义的理论成果. 然而, 现有的相关研究中较少涉及到广义有界变差函数的复合. 1981 年 Josephy 首先开始对一般的有界变差函数复合进行了研究[1]. 1990 年 Merentes 讨论了 p 有界变差函数复合的有关结论[2]. 2004 年Pamela等探讨了在复合条件下 Λ 有界变差函数和 Φ 有界变差函数类的不变性[3]. 笔者在前人研究的基础上, 对更广的有界变差函数类的复合进行了进一步的研究.

1 p-Λ 有界变差函数

定义 1[4] 设 f 是以 2π 为周期的实函数, 设 $\lambda_n>0$ $(n=1,2,\cdots)$ 单调增加, 且 $\sum_{n=1}^{\infty}1/\lambda_n=+\infty$. 如果对于一切不重叠的区间列 $I_n=[a_n,b_n]\subset[0,2\pi]$ $(n=1,2,\cdots)$ 有:

$$V_\Lambda(f)=\sup_{I_n}\sum_{n=1}^{\infty}|f(I_n)|/\lambda_n<+\infty,$$

其中, $f(I_n)=f(b_n)-f(a_n)$, 则称 f 是 Λ 有界变差函数, 简称 f 为 ΛBV 函数, 记作 $f\in\Lambda BV$ 或 $f\in\{\lambda_n\}BV$.

定义 2[5] 设 $1\leqslant p\leqslant\infty$, $\{I_n\}$ 是 I 上不重叠的区间列, 若对一切的区间 I 有:

$$V_\Lambda(f,p,I)=\sup V_\Lambda(\{I_m\},f,p,I)=M<\infty,$$

其中, $V_\Lambda(\{I_m\},f,p,I)=(\sum_{m=1}^{\infty}|f(a_m)-f(b_m)|^p/\lambda_m)^{1/p}$. 则称 f 是 p-Λ 有界变差函数, 简称 f 为 $\Lambda BV^{(p)}$ 函数, 记作 $f\in\Lambda BV^{(p)}(I)$.

$p=1$ 时, $\Lambda BV^{(p)}(I)=\Lambda BV(I)$; 当对任何的 m 都有 $\lambda_m=1$ 时, $\Lambda BV^{(p)}(I)=BV^{(p)}(I)$; 当 $p=1$, 对任何的 m 都有 $\lambda_m=m$ 时, $\Lambda BV^{(p)}(I)=HBV$; 当 $p=1$, 对任何的 m 都有 $\lambda_m=1$ 时, $\Lambda BV^{(p)}(I)$ 就是一般意义下的有界变差函数类.

收稿日期: 2008-10-24. 宁波大学学报（理工版）网址: http://3xb.nbu.edu.cn
基金项目: 浙江省教育厅科研项目（20051778）.
第一作者: 吴伟燕（1983－）, 女, 江西上饶人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: Fourier 分析与函数逼近. E-mail: w_weiyan@163.com
*通讯作者: 俞国华（1954－）, 男, 浙江宁波人, 硕士/教授, 主要研究方向: Fourier 分析与函数逼近. E-mail: yuguohua@nbu.edu.cn

Vyas 在文献[6]中讨论了 $\Lambda BV^{(p)}$ 这一类函数的性质, 得出如下定理.

定理 A[6]　若 φ 是 $I\to[c,d]$ 上的单调函数, $f\in\Lambda BV^{(p)}[c,d]$, 则 $f\circ\varphi\in\Lambda BV^{(p)}(I)$.

我们知道

定理 B[1]　设 $g:I\to I$, 对取值于 I 的一切 BV 函数 f, 函数 $g\circ f$ 在 BV 中的充要条件是 g 在 I 上满足 Lipschitz 条件.

定理 C[3]　设 $g:I\to I$, 对取值于 I 的一切 ΛBV, ΦBV 函数 f, 其复合函数 $g\circ f$ 仍为 ΛBV, ΦBV 函数的充要条件是 g 在 I 上满足 Lipschitz 条件.

下面定理证明了若 $f\in\Lambda BV^{(p)}(I)$, 定理 C 的结果也成立.

定理 1　假设 $\Lambda=\{\lambda_k\}$ 是给定的不减数列, $\sum_{k=1}^{\infty}1/\lambda_k=\infty$, 又设 $g:I\to I$. $f:I\to I$ 是 $\Lambda BV^{(p)}(I)$ 函数, 则复合函数 $g\circ f\in\Lambda BV^{(p)}(I)$, 当且仅当 g 满足 Lipschitz 条件.

为证明定理 1, 需要下面的引理.

引理 1[7-8]　设 $a=(a_1,\cdots,a_k)$ 和 $b=(b_1,\cdots,b_k)$ 是任意 2 个非负的 k 维向量, $a^*=(a_{i_1},\cdots,a_{i_k})$ 和 $b^*=(b_{j_1},\cdots,b_{j_k})$ 是 a 和 b 的 2 个递减重排, 那么

$$ab=\sum_{j=1}^{k}a_jb_j\leqslant a^*b^*=\sum_{l=1}^{k}a_{i_l}b_{j_l}.$$

引理 2[7-8]　设 $\alpha_i>0$, $i=1,\cdots,k$, $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i=1$. 那么在引理 1 的假设下(1)式成立.

$$(\sum_{j=1}^{k}\alpha_ja_j)(\sum_{j=1}^{k}\alpha_jb_j)\leqslant\sum_{l=1}^{k}\alpha_la_{i_l}b_{j_l}. \tag{1}$$

定理 1 的证明

充分性: 设 g 是在 I 上满足 Lipschitz 条件的函数, 则 $|g(t)-g(u)|\leqslant M|t-u|$ (M 为 Lipschitz 常数). 又设 $I_j=[\alpha_j,\beta_j]\subset I$ 为不重叠的区间列, $f:I\to I$, 且 $f\in\Lambda BV^{(p)}(I)$, 下证 $g\circ f\in\Lambda BV^{(p)}(I)$.

由 $f\in\Lambda BV^{(p)}(I)$, 则存在常数 k, 使得对一切 $\{I_j\}$ 有:

$$(\sum_{j=1}^{\infty}|f(I_j)|^p/\lambda_j)^{1/p}\leqslant k<\infty.$$

从而,

$$(\sum_{j=1}^{\infty}|g\circ f(I_j)|^p/\lambda_j)^{1/p}=(\sum_{j=1}^{\infty}|g[f(\beta_j)]-g[f(\alpha_j)]|^p/\lambda_j)^{1/p}\leqslant$$
$$(\sum_{j=1}^{\infty}M^p|f(\beta_j)-f(\alpha_j)|^p/\lambda_j)^{1/p}=$$
$$M(\sum_{j=1}^{\infty}|f(I_j)|^p/\lambda_j)^{1/p}\leqslant Mk<\infty,$$

所以 $g\circ f\in\Lambda BV^{(p)}(I)$.

必要性: 取 $\varphi(x)=x$, 则 φ 是 I 上 $\Lambda BV^{(p)}(I)$ 函数, 而且在 I 上有 $m\leqslant f\leqslant M$. 所以在区间列 $I_k\subset I$ 上有:

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\beta_k-\alpha_k|^p/\lambda_k<\infty,$$

从而,

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\beta_k-\alpha_k|^p/2^k\lambda_k\leqslant$$
$$1/2\sum_{k=1}^{\infty}|\beta_k-\alpha_k|^p/\lambda_k<\infty.$$

令 $f(x)=(\varphi(x)-m)/(M-m)$, 可知 $f\in\Lambda BV^{(p)}(I)$.

假设 g 不满足 Lipschitz 条件, 则 $\exists I_j=[\alpha_j,\beta_j]\subset I$ 有:

$$|g(\beta_j)-g(\alpha_j)|\geqslant 2^{j-p}(M-m)|\beta_j-\alpha_j|.$$

下证

$$g\circ f\notin\Lambda BV^{(p)}(I),$$
$$\sum_{j=1}^{\infty}|g\circ f(I_j)|^p/\lambda_j=\sum_{j=1}^{\infty}|g[f(\beta_j)]-g[f(\alpha_j)]|^p/$$
$$\lambda_j\geqslant\sum_{j=1}^{\infty}2^j(M-m)^p|f(\beta_j)-f(\alpha_j)|^p/\lambda_j=$$
$$\sum_{j=1}^{\infty}2^j(M-m)^p/(M-m)^p|\beta_j-\alpha_j|^p/\lambda_j=$$
$$\sum_{j=1}^{\infty}2^j|\beta_j-\alpha_j|^p/\lambda_j.$$

根据引理 2, 取 $a_j=1/2^j$, 则 $\sum_{j=1}^{\infty}a_j=1$, 所以有:

$$\sum_{j=1}^{\infty}2^j|\beta^j-\alpha^j|^p/\lambda_j\geqslant\sum_{j=1}^{\infty}4^j/2^j.$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}|\beta^j-\alpha^j|^p|/(2^j\lambda_j)=A\sum_{j=1}^{\infty}2^j=\infty,$$

其中 $A=\sum_{j=1}^{\infty}|\beta^j-\alpha^j|^p/(2^j\lambda_j)$ 是常数.

从而可得 $g\circ f\notin \Lambda BV^{(p)}(I)$.

2 Λ平均有界变差函数

1984 年, 施咸亮引入了 ΛBMV 的概念.

定义 3 设 $f\in L_{2\pi}$, 假如存在常数 M, 使得对于一切区间 $I=[\alpha,\beta]$ 成立着

$$\mu_I(f)=1/|I|\int_I|f(x)-f_I|\,\mathrm{d}x<M,$$

则说明 f 是有界平均振荡函数, 简称 f 为 BHO 函数, 记作 $f(x)\in \mathrm{BMO}$, 其中 $|I|=\beta-\alpha$, $f_I=1/|I|\cdot\int_I f(y)\mathrm{d}y$.

定义 4[9-10] 设 $\Lambda=\{\lambda_n\}$ 为不减正数列, $\sum_{n=1}^{\infty}1/\lambda_n=+\infty$, 设 $\{I_n=[\alpha_n,\beta_n]\}$ 为 $[a,a+2\pi]$ 上不重叠的区间列, a 为任意实数, 若有:

$$M_\wedge(f)=\sup_{\{I_n\}}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_{I_n}/\lambda_n\leqslant k<\infty,$$

其中 k 是与区间列 $\{I_n\}$ 无关的常数, 则说明 f 是 Λ 有界平均变差函数, 简称 f 为 ΛBMV 函数，记作 $f\in\Lambda BMV$.

下面我们将文献[1,3]的结论推广到 ΛBMV 函数类中, 也有类似的结果成立.

定理 2 假设 $\Lambda=\{\lambda_n\}$ 是给定的不减正数列, $\sum_{k=1}^{\infty}1/\lambda_k=+\infty$, 又设 g 是 $I\to I$ 的可积函数, 为使对于一切 $I\to I$ 的 ΛBMV 函数 f, 复合函数 $g\circ f\in\Lambda BMV$ 当且仅当 g 满足 Lipschitz 条件.

在定理 2 证明前, 先引入几个辅助命题.

引理 3 设 $f(x)$ 是 $I=[\alpha,\beta]$ 上线性函数, 有:

(i) $\mu_I(f)=1/4|f(\beta)-f(\alpha)|$.

(ii) 对于任意的 $r\in(\alpha,\beta)$ 有:

$$\max\{\mu_{[\alpha,r]}(f),\mu_{[r,\beta]}(f)\}\leqslant\mu_{[\alpha,r]}(f)+\mu_{[r,\beta]}(f).$$

事实上, 条件(i)可直接计算得到; 条件(ii)可由条件(i)推出.

引理 4 设 f 在 $I=[\alpha,\beta]$ 上可积, 那么对于一切常数 c 成立着

$$\mu_I(f)\leqslant 2/|I|\int_I|f(x)-c|\,\mathrm{d}x.$$

证明

$$\begin{aligned}\int_I|f(x)-f_I|\,\mathrm{d}x\leqslant&\int_I|f(x)-c|\,\mathrm{d}x+\\ &\int_I|f_I-c|\mathrm{d}x=\int_I|f(x)-c|\mathrm{d}x+|I||f_I-c|=\\ &\int_I|f(x)-c|\,\mathrm{d}x+\left|\int_I(f(x)-c)\mathrm{d}x\right|\leqslant\\ &\int_I|f(x)-c|\,\mathrm{d}x+\int_I|f(x)-c|\,\mathrm{d}x=\\ &2\int_I|f(x)-c|\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

从而有:

$$\mu_I(f)\leqslant 2/|I|\int_I|f(x)-c|\,\mathrm{d}x.$$

定理 2 的证明

充分性: 设 g 在 I 上满足 Lipschitz 条件, 即

$$|g(t)-g(u)|\leqslant M|t-u|, \tag{2}$$

其中, M 为 Lipschitz 常数.

设 $I_i=[\alpha_i,\beta_i]$ 为 I 上不重叠区间列, 设 $f:I\to I$, $f\in\Lambda BMV$. 那么存在常数 k 使

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu_{I_i}(f)/\lambda_i\leqslant k<\infty,$$

即

$$\sum_{i=1}^{\infty}(1/|I_i|\int_{I_i}|f(x)-f_{I_i}|\,\mathrm{d}x)/\lambda_i\leqslant k.$$

由引理 4 和(2)式, 取 $c=g(f_{I_i})$ 得:

$$\begin{aligned}M_\wedge(g\circ f)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu_{I_i}(g\circ f)/\lambda_i\leqslant&\\ &\sum_{i=1}^{\infty}(2/|I_i|\int_{I_i}|g[f(x)]-c|\,\mathrm{d}x)/\lambda_i=\\ &\sum_{i=1}^{\infty}(2/|I_i|M\int_{I_i}|f(x)-f_{I_i}|\,\mathrm{d}x)/\lambda_i=\\ &2M\sum_{i=1}^{\infty}(1/|I_i|\int_{I_i}|f(x)-f_{I_i}|\,\mathrm{d}x)/\lambda_i\leqslant 2Mk,\end{aligned}$$

所以 $g\circ f\in\Lambda BMV$.

必要性: 设 g 不满足 Lipschitz 条件, 我们证明

存在 ΛBMV 中的 $f: I \to I$，使 $g\circ f \notin \Lambda BMV$. 不妨设 $\lambda_1 \geqslant 1$，按假设在区间 I 上有区间列 $I_j = [t_j, u_j]$ 使 $|g(t_j) - g(u_j)| \geqslant 4^j |t_j - u_j|$，且设:

$$u_1 - t_1 \leqslant 1/2,$$

$$u_{j+1} - t_{j+1} \leqslant 1/2 |u_j - t_j|,\ j = 1, 2, \cdots,$$

于是就有 $u_j - t_j \leqslant 1/2^j$. 选自然数子列 k_j，使 $k_1 = 1$ 且

$$1 \leqslant 2^j |u_j - t_j| \sum_{k_j \leqslant s \leqslant k_{j+1}-1}^{n} 1/\lambda_s \leqslant 2.$$

定义如下的 f:

$$f(x) = \begin{cases} t_j, \text{若} x = 1/s, k_j \leqslant s \leqslant k_{j+1} - 1; \\ \mu_j, x = 1/s + 1/2(s+1)^2, k_j \leqslant s \leqslant k_{j+1} - 1; \\ \text{取其他地方,} \end{cases}$$

所以 f 在 I 上是分段线性函数，由引理 3 得:

$$M_\wedge(f) = \sup_{\{I_j\}} \sum_{j=1}^{\infty} \mu_{I_j}(f)/\lambda_j =$$

$$\sup_{\{I_j\}} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k_j \leqslant s \leqslant k_{j+1}-1} |u_j - t_j|/4\lambda_s \leqslant$$

$$2\sum_{j=1}^{\infty} 1/4 \cdot 2^j = \sum_{j=1}^{\infty} 1/2^{j+1} < \infty.$$

另一方面，

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu_{I_j}(g\circ f)/\lambda_j = \sum_{j=1}^{\infty} (1/|I_j| \int_{I_j} |g[f(x)] -$$

$$g[f(x)]_{I_j} |\mathrm{d}x)/\lambda_j \geqslant \sum_{j=1}^{\infty} 1/|I_j| \int_{I_j} |g[f(x) -$$

$$g(f_{I_j})]| \mathrm{d}x - |g[f(x)]_{I_j} - g(f_{I_j})|/\lambda_j \geqslant$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} (1/|I_j| \int_{I_j} |g[f(x)] - g(f_{I_j})| \mathrm{d}x)/\lambda_j -$$

$$1/\lambda_1 \sum |g[f(x)]_{I_j} - g(f_{I_j})| \geqslant \sum_{j=1}^{\infty} (4^j/|I_j| \cdot$$

$$\int_{I_j} |f(x) - f_{I_j}| \mathrm{d}x)/\lambda_j - 1/\lambda_1 |g(f)_I - g(f_I)| =$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} 4^j \sum_{k_j \leqslant s \leqslant k_{j+1}-1}^{n} |u_j - t_j|/\lambda_s - A \geqslant$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} 4^j/2^j - A \geqslant \sum_{j=1}^{\infty} 2^j - A = +\infty,$$

其中 $A = 1/\lambda_1 |g(f)_I - g(f_I)|$ 为常数.

因此 $g\circ f \notin \Lambda BMV$.

3　变差模函数类

Chanturiya[11]引入变差模的概念，f 的变差模定义为:

$$V_f(n) = \sup_{\{I_k\}} \sum_{k=1}^{n} |f(I_k)|,$$

其中 $\{I_k\}$ 为 I 上重叠的区间列.

定义 5[12]　设 $V = \{v(n)\}$ 为给定的非减且上凸的正数列，那么当 $V_f(n) = o(v(n))$ 时称 f 属于类 $V[v]$. 记 $MV_f(n) = \sup_{\{I_k\}} \sum_{k=1}^{n} 1/|I_k| \int_{I_k} |f(x) - f_{I_k}| \mathrm{d}x$，定义 $MV[v] = \{f: MV_f(n) = o(v(n))\}$，其中 $v(n)$ 为给定的不减凸数列，$v(n) > 0$.

我们有下面的结论成立.

定理 3　设 $V = \{v(n)\}$ 为给定的非减且凸的正数列，g 是 $I \to I$ 的可积函数，为使对于一切 $I \to I$ 的 $MV[v]$ 函数 f，复合函数 $g\circ f \in MV[v]$，当且仅当 g 满足 Lipschitz 条件.

引理 5　设 $v(n)$ 是非负不减且凸的正数列，那么存在常数 k 使 $v(k+1) - v(k) \leqslant B$，其中 B 为常数.

引理 5 的证明可根据上凸的定义：$v(k+1) + v(k-1) - 2v(k) \leqslant 0$ 直接得出.

定理 **3** 的证明

充分性与定理 2 的充分性证明相同，必要性证明如下.

设 g 不满足 Lipschitz 条件，那么存在 I 上不重叠区间列 $I_j = [t_j, u_j]$.

设 $|g(t_j) - g(u_j)| \geqslant 4^j |t_j - u_j|$.

不妨设:

$$u_1 - t_1 \leqslant 1/2,$$

$$u_{j+1} - t_{j+1} \leqslant 1/2 |u_j - t_j|,\ j = 1, 2, \cdots,$$

于是有 $u_j - t_j \leqslant 1/2^j$. 选取自然数子列 k_j，使 $k_1 = 1$，且 $1 \leqslant 2^j |u_j - t_j| (v(k_{j+1} - 1) - v(k_j)) \leqslant B + 1$，$B$ 为引理 5 中的常数. 下面的证明与定理 2 相似.

参考文献:

[1]　Josephy M. Composition functions of bounded variation[J].

Proc Amer Math Soc, 1981, 83(2):354-356.

[2] Merentes N. Composition functions of bounded *p*-variation[J]. Ann Pol Math, 1990, 1:39-45.

[3] Pamela B P, Daniel W. On the invariance of classes $\varnothing BV$, ΛBV under composition[J]. Proc Amer Math Soc, 2004, 132:755-760.

[4] Daniel Waterman. On convergence of Fourier series of function of generalized bounded variation[J]. Studia Math, 1972, 44:107-117.

[5] Shiba M. On the absolute convergence of Fourier series of functions class $\Lambda BV^{(p)}$[J]. Sci Rep Fukushima Univ, 1980, 30:7-10.

[6] Vyas R G. Properties of functions of generalized bounded variation[J]. Matematички Bechик, 2006, 58:91-96.

[7] Nelson Merentes. On the composition operator in $RV_{\varnothing}[a,b]$[J]. Collect Math, 1995, 46(3):231-238.

[8] 施咸亮. 不等式[M]. 杭州: 浙江人民出版社, 1979.

[9] 施咸亮. 函数族 ΛBMV 及其对于 Fourier 级数的应用[J]. 中国科学: A 辑, 1984, 9:796-805.

[10] 王斯雷. Λ 有界变差函数的一些性质[J]. 中国科学: A 辑, 1981, 11:1 299-1 309.

[11] Chanturiya Z A. The modulus of variation of a function and its application in the theory of Fourier series[J]. Soviet Math Dok L, 1974, 15:67-71.

[12] 金炎兴. 关于 ΛBMV 和 $MV[v]$ 类的几点注记[J]. 浙江师范大学学报: 自然科学版, 1989, 12(1):27-32.

Composition Functions of Generalized Bounded Variation

WU Wei-yan, YU Guo-hua*

(Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: In this paper, the composition of functions $\Lambda BV^{(p)}$ and ΛBMV are investigated, and the necessary and sufficient condition of function compound with functions of $\Lambda BV^{(p)}$ or ΛBMV still $\Lambda BV^{(p)}$ or ΛBMV is presented. Based upon the definition of $MV[v]$, the necessary and sufficient condition of the composition of $MV[v]$ is derived.

Key words: *p*-Λ-bounded variation; Λ-bounded mean variation; composite function; Lipschitz condition

CLC number: O174.2 **Document code:** A

（责任编辑 史小丽）