寻找变系数 KP 方程的精确解

刘 彬, 阮航宇*

（宁波大学 理学院, 浙江 宁波 315211）

摘要: 将非线性演化方程的变系数看作与实际物理场具有相等地位的新的变量, 用推广的经典李群约化法, 建立了常系数 KP 方程以及变系数 CKP 方程的解与新的变系数 KP 方程解之间的关系. 利用已知的常系数 KP 和变系数 CKP 方程的解得到了新的变系数 KP 方程的一般解和某些特殊形式的精确解.

关键词: 变系数 KP 方程; 李群约化法; 推广的对称群

中图分类号: O415 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-5132（2012）02-0088-06

非线性问题的求解是非线性科学中一项重要的工作. 光学、凝聚态物理、生物学、等离子体物理以及化学等众多领域中的一些非线性现象可以通过非线性方程来描述. 众所周知, 非线性偏微分方程存在无限多解, 而大部分能够较好描述实际物理问题的非线性方程又是变系数方程, 而要得到这类微分方程的精确解是非常困难的工作. 目前, 求解非线性偏微分方程的方法很多, 主要有: 反散射法、Bäklund 变换和 Darboux 变换法, 以及双线性化法等等. 然而大多数方法只限于求解常系数偏微分方程. 因此, 寻找变系数非线性方程的求解方法就成了一个很重要的问题.

近几年, 采用的一些研究非线性方程的方法令人很感兴趣[1-5]. 文献[4]中作者运用推广的经典李群约化法, 将势函数作为新的独立变量, 得到了保持原方程不变的新的推广对称群. 利用此群在某些不同变系数方程的解之间建立一种关系. 尤其是在假定原方程是常系数方程时, 某些特殊类型的变系数方程的解可由相应的常系数方程的解得到. 这些工作为寻找变系数非线性偏微分方程的精确解提供了启示.

相比常系数 KP 方程, 变系数 KP 方程能够更好地描述实际的表面波情况. 而一般的变系数 KP 方程能够处理宽度、深度及密度等不断变化时表面波通过峡谷进入大海或海洋的具体情况. 笔者应用推广的李群约化法来求解变系数 KP 方程.

考虑一般的变系数 KP 方程:

$$(u_t + f(t)uu_x + g(t)u_{xxx})_x + p(t)u_{yy} = 0, \tag{1}$$

这里, $f(t)\neq 0$, $g(t)\neq 0$ 和 $p(t)\neq 0$ 都是关于变量 t 的函数. 文献[3]使用奇次平衡法和厄米变换得到了当 $h(t)=0$ 时的单孤子和多孤子解. 笔者把方程中的变系数 $f(t), g(t)$ 和 $p(t)$ 取成与实际物理场 u 具有相等地位的变量后, 利用其推广的对称算子, 得到了原方程推广的对称群和有限变换. 利用这个推广的对称群, 在变系数与常系数 KP 方程的解之间建立了一种关系. 再利用这种关系, 得到了这些新变系数 KP 模型的一般解和某些具体模型的精确解.

1 KP 方程的推广对称群

把 KP 方程写成以下形式:

$$u_{xt} = Fu_{xx} + Hu_{yy} + Gu_{xxx} + W, \tag{2}$$

其中 F, H, G, W 作为跟 u 同等地位的独立变量都是 $\{x, y, t, u, u_x\}$ 的函数, 则方程(2)推广的对称算子为:

$$\begin{aligned}K = {}& \xi\partial_x + \zeta\partial_y + \tau\partial_t + \eta\partial_u + f(x,y,t,u,u_x,F)\partial_F + \\ & h(x,y,t,u,u_x,H)\partial_H + g(x,y,t,u,u_x,G)\partial_G + \\ & w(x,y,t,u,u_x,W)\partial_W,\end{aligned} \tag{3}$$

收稿日期: 2011−07−19. 宁波大学学报（理工版）网址: http://3xb.nbu.edu.cn
基金项目: 国家自然科学基金（10735030）; 宁波大学王宽诚幸福基金.
第一作者: 刘 彬（1982−）, 男, 陕西西安人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 非线性物理. E-mail: jialebihainiuu@163.com
*通讯作者: 阮航宇（1956−）, 女, 浙江平湖人, 博士/教授, 主要研究方向: 非线性物理. E-mail: ruanhangyu@nbu.edu.cn

其中 ξ,ζ,τ 和 η 都是 $\{x,y,t,u,u_x\}$ 的函数. 变换群为:

$$\begin{aligned}
&x_1 = x + \varepsilon\xi(x,y,t,u,u_x),\\
&y_1 = y + \varepsilon\zeta(x,y,t,u,u_x),\\
&t_1 = t + \varepsilon\tau(x,y,t,u,u_x),\\
&u_1 = u + \varepsilon\eta(x,y,t,u,u_x),\\
&F_1 = F + \varepsilon f(x,y,t,u,u_x,F),\\
&H_1 = H + \varepsilon h(x,y,t,u,u_x,H),\\
&G_1 = G + \varepsilon g(x,y,t,u,u_x,G),\\
&W_1 = W + \varepsilon \mathrm{w}(x,y,t,u,u_x,W),
\end{aligned} \tag{4}$$

ε 为群参数. 为使方程形式不变, 必须满足:

$$\begin{aligned}
&[\eta_{xt}] - F[\eta_{xx}] - H[\eta_{yy}] - G[\eta_{xxxx}] - fu_{xx} -\\
&\quad hu_{yy} - gu_{xxxx} - w = 0,
\end{aligned} \tag{5}$$

由此得到超定方程组:

$$\begin{aligned}
&\tau = \tau(t),\quad \xi_{xx} = 0,\quad \eta_{uu} = 0,\quad \eta_{xu} = 0,\\
&\zeta_{yy} - 2\eta_{yu} = 0,\quad \eta_{ut} - \xi_{xt} = 0,\\
&h + H(\xi_x - 2\zeta_y + \tau_t) = 0,\\
&f + \xi_t + (\tau_t - \xi_x)F = 0,\\
&g + (\tau_t - 3\xi_x) = 0,\\
&w + W(\tau_t + \xi_x - \eta_u) - \eta_{xt} + F\eta_{xx} + H\eta_{yy} + G\eta_{xxxx} = 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

求解(6)式可得:

$$\begin{aligned}
&\tau = \tau(t),\ \xi = (D + c_1)x + E,\ \zeta = 2B + c_2 y + c_3,\\
&\eta = (D + B')u + A,\\
&f = (D + c_1 - \tau')F - D'x - E',\\
&h = H(4B' - D - c_1 + 2c_2 - \tau'),\\
&w = A_{xt} - FA_{xx} - GA_{xxxx} - W(\tau' - B' + c_1) -\\
&\quad H(A_{yy} + uB'''),
\end{aligned} \tag{7}$$

其中 $A = A(x,t,y),\ B = B(y)$, τ, D 和 E 是 t 的任意平滑函数, c_1, c_2 和 c_3 是任意常数. 由于很难直接获得系统(8)的有限变换, 这里我们只考虑它的一些特殊情况. 设 $A(x,t,y) = A(t)$, 当 $B(y) = 0, E(t) = 0$ 和 c_3=0 时, 从 $\tau(t) \neq 0$ 和 $\tau(t) = 0$ 两方面来讨论.

当 $\tau(t) \neq 0$ 时:

$$\begin{aligned}
&f_0(t_1) = \varepsilon + f_0(t),\ y_1 = y\exp(\varepsilon c_2),\\
&x_1 = x\exp(\varepsilon(c_2 + D(t_1))),\\
&u_1 = f_1(t_1)(f_2(t_1) - f_2(t) + u / f_1(t)),\\
&W_1 = W\tau(t)/\tau(t_1)\exp(-\varepsilon c_1),\\
&F_1 = f_1(t_1)/\tau(t_1)(R_0(x_1,t_1) - R_0(x_1,t) +\\
&\quad \exp(\varepsilon c_1)\tau(t)/f_1(t)F),\\
&H_1 = H\tau(t) f_1(t)/(\tau(t_1) f_1(t_1))\mathrm{e}^{\varepsilon(2c_2 - c_1)},\\
&G_1 = G\tau(t) f_1^3(t_1)/(\tau(t_1) f_1^3(t))\mathrm{e}^{3\varepsilon c_1},
\end{aligned} \tag{8}$$

ε 为群参数. 其中

$$\begin{aligned}
&f_0(t_1) = \int^{t_1} 1/\tau(\sigma)\mathrm{d}\sigma,\\
&f_2(t_1) = \int^{t_1} A(\sigma)/\tau(\sigma)/f_1(\sigma)\mathrm{d}\sigma,\\
&f_1(t_1) = \int^{t_1} D(\sigma)/\tau(\sigma)\mathrm{d}\sigma,\\
&R_0(x_1,t_1) = \int^{t_1} -D'(\sigma)x_1 / f_1(\sigma)\mathrm{d}\sigma.
\end{aligned}$$

当 $\tau(t) = 0$ 时:

$$\begin{aligned}
&t_1 = t,\ y_1 = y\exp(\varepsilon c_2),\ x_1 = x\exp(\varepsilon(c_1 + D(t_1))),\\
&W_1 = \frac{W}{\exp(\varepsilon c_1)},\ G_1 = G\,\mathrm{e}^{3\varepsilon(c_1 + D(t_1))},\\
&u_1 = u\,\mathrm{e}^{\varepsilon D(t_1)} + \varepsilon A(t_1),\ F_1 = F\,\mathrm{e}^{\varepsilon(c_1 + D(t_1))} - \varepsilon x_1 D'(t_1),\\
&H_1 = H\exp(\varepsilon(2c_2 - c_1 - D(t_1))).
\end{aligned} \tag{9}$$

当 $A = 1/t$, $\tau = 1/t$ 以及 $D = 1, c_1 = -1$ 时有限变换(8)式可以被定义为:

$$\begin{aligned}
&t_1 = \sqrt{2\varepsilon + t^2},\quad y_1 = y\mathrm{e}^{\varepsilon c_2},\quad x_1 = x,\\
&H_1 = H\,\mathrm{e}^{2\varepsilon c_2} t_1 / \sqrt{t_1^2 - 2\varepsilon},\\
&W_1 = W\,\mathrm{e}^{\varepsilon} t_1 / \sqrt{t_1^2 - 2\varepsilon},\\
&u_1 = u\exp(\varepsilon) + t_1 - \sqrt{t_1^2 - 2\varepsilon},\\
&F_1 = t_1 / \sqrt{t_1^2 - 2\varepsilon}F,\\
&G_1 = t_1 / \sqrt{t_1^2 - 2\varepsilon}G.
\end{aligned} \tag{10}$$

而当 $A = \sin t,\ D = t^2$ 以及有限变换(9)式可以被定义为:

$$\begin{aligned}
&t_1 = t,\ y_1 = y\exp(\varepsilon c_2), x_1 = x\exp(\varepsilon(c_1 + t_1^2)),\\
&H_1 = H\exp(\varepsilon(2c_2 - c_1 - t_1^2)), W_1 = W\exp(-\varepsilon c_1),\\
&u_1 = u\exp(\varepsilon t_1^2) + \varepsilon\sin t_1,\\
&F_1 = F\exp(\varepsilon(c_1 + t_1^2)) - 2\varepsilon t_1 x_1,\\
&G_1 = G\exp(3\varepsilon(c_1 + t_1^2)).
\end{aligned} \tag{11}$$

2　变系数 KP 模型及其解

用推广的对称算子和有限变换(8)~(11)式, 建立常系数和变系数方程之间的关系. 当原方程是我们熟知解的常系数方程时, 可直接构造出一些新的变系数 KP 模型及其解.

由有限变换(8)式, 可得到下面的变系数方程:

$$u_{1x_1t_1} - \frac{f_1(t_1)}{\tau(t_1)}(R_0(x_1,t_1) - R_0(x_1,t) +$$

$$F\frac{\tau(t)}{f_1(t)}\exp(\varepsilon c_1))u_{1x_1x_1}-H\frac{\tau(t)f_1(t)}{\tau(t_1)f_1(t_1)}\cdot$$
$$\exp(\varepsilon(2c_2-c_1))u_{1y_1y_1}-G\frac{\tau(t)f_1^3(t_1)}{\tau(t_1)f_1^3(t)}\cdot$$
$$\exp(3\varepsilon c_1)u_{1x_1x_1x_1x_1}-\frac{W\tau(t)}{\tau(t_1)\exp(\varepsilon c_1)}=0, \qquad (12)$$

这里 F, H, G 和 W 是 $\{x_2, y_2, t_2\ u_2, u_{2x_2}\}$ 的函数. 其中,

$$u_2=f_1(t)(f_2(t)-f_2(t_1)+u_1/f_1(t_1)),$$
$$x_2=x_1\mathrm{e}^{-\varepsilon(c_1+D(t_1))}, y_2=y_1\mathrm{e}^{-\varepsilon c_2},$$
$$t_2=f_0^{-1}(f_0(t_1)-\varepsilon),$$
$$u_{2x_2}=f_1(t)/f_1(t_1)\mathrm{e}^{\varepsilon(c_1+D(t_1))}u_{1x_1},$$

则方程(12)的解可写为:

$$u_1=(u(x=\frac{x_1}{\exp(\varepsilon(c_1+D(t_1)))}, t=f_0^{-1}(f_0(t_1)-\varepsilon),$$
$$y=\frac{y_1}{\exp(\varepsilon c_2)})/f_1(t)+f_2(t_1)-f_2(t))f_1(t_1), \qquad (13)$$

(13)式中 $u(x,y,t)$ 是原方程(2)的解.

由有限变换(9)式, 可得如下变系数方程:

$$u_{1x_1t_1}-(\frac{F}{\exp(-\varepsilon(c_1+D(t_1)))}-\varepsilon x_1D'(t_1))u_{1x_1x_1}-$$
$$\frac{H}{\exp(\varepsilon(c_1+D(t_1)-2c_2))}u_{1y_1y_1}-W\exp(-\varepsilon c_1)-$$
$$\frac{G}{\exp(-3\varepsilon(c_1+D(t_1)))}u_{1x_1x_1x_1x_1}=0, \qquad (14)$$

则方程(14)的解可写为:

$$u_1(x_1,y_1,t_1)=u(x,y,t)\exp(\varepsilon D(t_1))+$$
$$\varepsilon A(t_1)\big|x=x_2, y=y_2, t=t_2, \qquad (15)$$

(15)式中 $u(x,y,t)$ 也是原方程(2)的解.

从有限变换(10)式和(11)式, 可得到以下 2 个变系数 KP 方程:

$$u_{1x_1t_1}-F\frac{t_1}{\sqrt{t_1^2-2\varepsilon}}u_{1x_1x_1}-H\frac{t_1}{\sqrt{t_1^2-2\varepsilon}}\exp(2\varepsilon c_2)u_{1y_1y_1}-$$
$$W\frac{t_1}{\sqrt{t_1^2-2\varepsilon}}\exp(\varepsilon)-G\frac{t_1}{\sqrt{t_1^2-2\varepsilon}}u_{1x_1x_1x_1x_1}=0, \qquad (16)$$

和

$$u_{1x_1t_1}-(F\exp(\varepsilon(c_1+t_1^2))-2\varepsilon t_1x_1)u_{1x_1x_1}-$$
$$H\exp(\varepsilon(2c_2-c_1-t_1^2))u_{1y_1y_1}-W\exp(-\varepsilon c_1)-$$
$$G\exp(3\varepsilon(c_1+t_1^2))u_{1x_1x_1x_1x_1}=0, \qquad (17)$$

则方程(16)和(17)的解可分别写成:

$$u_1(x_1,y_1,t_1)=u(x=x_1, y=y_1\exp(-\varepsilon c_2),$$
$$t=\sqrt{t_1^2-2\varepsilon})\exp(\varepsilon)+t_1-\sqrt{t_1^2-2\varepsilon}, \qquad (18)$$
$$u_1(x_1,y_1,t_1)=u(t=t_1, y=y_1\exp(-\varepsilon c_2),$$
$$x=x_1\exp(-\varepsilon(c_1+t_1^2)))\cdot$$
$$\exp(\varepsilon t_1^2)+\varepsilon\sin t_1, \qquad (19)$$

以上 2 式中 $u(x,y,t)$ 也仍是原方程(2)的解.

如把原方程(2)考虑成标准的常系数 KP 方程:

$$(u_t+6uu_x+u_{xxx})_x+3\kappa u_{yy}=0, \qquad (20)$$

这里 $\kappa=\pm1$ 和柱 KP 方程:

$$(u_t+uu_x+u_{xxx})_x+\frac{1}{2t}u_x+\frac{3\sigma^2}{t^2}u_{yy}=0, \qquad (21)$$

这里 $\sigma^2=\pm1$. 那么方程(2)中的 $\{F,H,G,W\}$ 就可以取成 $\{-6u,-3\kappa,-1,-6u_X^2\}$ 和 $\{-u,-3\sigma^2/t^2,-1,-1/2tu_x-u_x^2\}$. 则方程(16)和(17)就可以变成如下形式:

$$(u_{1t_1}+\frac{6t_1}{\sqrt{t_1^2-2\varepsilon}\exp(\varepsilon)}u_1u_{1x_1}+\frac{t_1}{\sqrt{t_1^2-2\varepsilon}}u_{1x_1x_1x_1})_{x_1}+$$
$$6\exp(-\varepsilon)(t_1-\frac{t_1^2}{\sqrt{t_1^2-2\varepsilon}})u_{1x_1x_1}+$$
$$\frac{3\kappa t_1}{\sqrt{t_1^2-2\varepsilon}\exp(-2\varepsilon c_2)}u_{1y_1y_1}=0, \qquad (22)$$

$$(u_{1t_1}+\frac{6}{\exp(-\varepsilon c_1)}u_1u_{1x_1}+\exp(3\varepsilon(c_1+$$
$$t_1^2))u_{1x_1x_1x_1})_{x_1}+2\varepsilon(t_1x_1-3\sin t_1)u_{1x_1x_1}+$$
$$\frac{3\kappa}{\exp(\varepsilon(c_1+t_1^2-2c_2))}u_{1y_1y_1}=0, \qquad (23)$$

或

$$(u_{1t_1}+\frac{t_1}{\sqrt{t_1^2-2\varepsilon}\exp(\varepsilon)}u_1u_{1x_1}+\frac{t_1}{\sqrt{t_1^2-2\varepsilon}}u_{1x_1x_1x_1})_{x_1}+$$
$$\exp(-\varepsilon)(t_1-\frac{t_1^2}{\sqrt{t_1^2-2\varepsilon}})u_{1x_1x_1}+\frac{t_1}{2(t_1^2-2\varepsilon)}u_{1x_1}+$$
$$\frac{3\sigma^2t_1}{(t_1^2-2\varepsilon)^{3/2}\exp(-2\varepsilon c_2)}u_{1y_1y_1}=0, \qquad (24)$$

$$(u_{1t_1}+\frac{1}{\exp(-\varepsilon c_1)}u_1u_{1x_1}+\exp(3\varepsilon(c_1+t_1^2))u_{1x_1x_1x_1})_{x_1}+$$
$$\varepsilon(2t_1x_1-\frac{\sin t_1}{\exp(-\varepsilon c_1)})u_{1x_1x_1}+\frac{1}{2t_1}u_{1x_1}+$$

$$\frac{3\sigma^2}{t_1^2\exp(\varepsilon(c_1+t_1^2-2c_2))}u_{1y_1y_1}=0, \tag{25}$$

方程(22)~(25)都是一般变系数方程[6]的一些特殊形式. 即:

$$\begin{aligned}&a(y,t)u_y+b(y,t)u_{xy}+c(y,t)u_{xx}+\\&(u_t+p(t)uu_x+q(t)u_{xxx})_x+\sigma(y,t)u_{yy}+\\&e(y,t)u_x+f(y,t)u+h(y,t)=0.\end{aligned} \tag{26}$$

而方程(26) (其中 $p(t)\neq 0, q(t)\neq 0, \sigma(y,t)\neq 0$) 所描述的情况比经典的常系数方程更加接近实际. 增加的项以及变系数使得我们能够处理: 宽度、深度及密度等不断变化时表面波通过峡谷进入大海或海洋的具体情况.

方程(22)及(23)和(24)及(25)的解可以通过有限变换(18)和(19)分别从方程(20)和(21)的解导出.

例如:

$$u=2\ln(\omega)_{xx}, \tag{27}$$

其中,

$$\begin{aligned}&\omega=1+\mathrm{e}^{\xi}+\mathrm{e}^{\eta}+\nu\mathrm{e}^{\xi+\eta},\\&\xi=ax+\lambda y-\frac{a^4+3\kappa\lambda^2}{a}t,\\&\eta=bx+\delta y-\frac{b^4+3\kappa\delta^2}{b}t,\\&\nu=\frac{3\kappa(\lambda b-\delta a)^2-3a^2b^2(a-b)^2}{3\kappa(\lambda b-\delta a)^2-3a^2b^2(a+b)^2},\end{aligned} \tag{28}$$

和

$$\begin{aligned}u=3\beta^2\sec h^2[&\frac{\beta x}{2}-\frac{\lambda\beta ty^2}{24}-\\&\frac{(\beta^4-\beta\delta y+3\lambda\delta^2)t}{2\beta}+\frac{\gamma}{2}],\end{aligned} \tag{29}$$

是方程(20)的双孤子解[7]和方程(21)的单孤波解[8]. 这里 $\kappa=\pm 1$, $\lambda=\pm 1$, a,b,λ,δ 以及 β,γ 是任意常数. 则由(18)和(19)式得:

$$u_1(x_1,y_1,t_1)=2\exp(\cos t_1)\ln(\omega)_{x_1x_1}, \tag{30}$$

其中,

$$\xi=a(x_1-\sin t_1)+\lambda y_1-\frac{a^4+3\kappa\lambda^2}{a}t_1,$$

$$\eta=b(x_1-\sin t_1)+\delta y_1-\frac{b^4+3\kappa\delta^2}{b}t_1,$$

ω 和 ν 不变.

和

$$u_1(x_1,y_1,t_1)=2\exp(\varepsilon t_1^2)\ln(\omega)_{x_1x_1}, \tag{31}$$

其中,

$$\xi=a\frac{x_1}{\exp(1/2\varepsilon)}+\lambda y_1-\frac{(a^4+3\kappa\lambda^2)t_1}{a\exp(3/2\varepsilon)},$$

$$\eta=b\frac{x_1}{\exp(1/2\varepsilon)}+\delta y_1-\frac{(b^4+3\kappa\delta^2)t_1}{b\exp(3/2\varepsilon)},$$

ω 和 ν 不变.

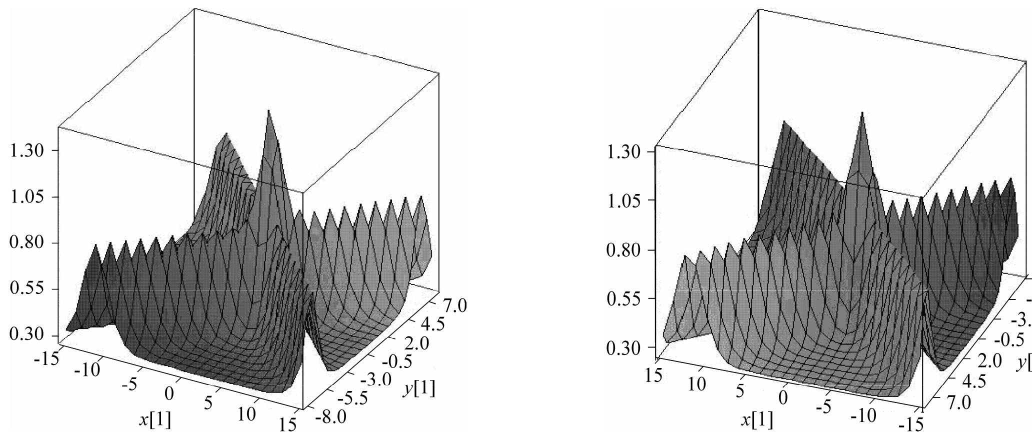
他们分别是方程(22)和(23)的双孤波解, 如图 1 和图 2 所示.

或

$$\begin{aligned}u_1=3\beta^2\exp(\cos t_1)\sec h^2[&\frac{\beta(x_1-\sin t_1)}{2}-\\&\frac{\lambda\beta t_1y_1^2}{24}-\frac{(\beta^4-\beta\delta y_1+3\lambda\delta^2)t_1}{2\beta}+\frac{\gamma}{2}],\end{aligned} \tag{32}$$

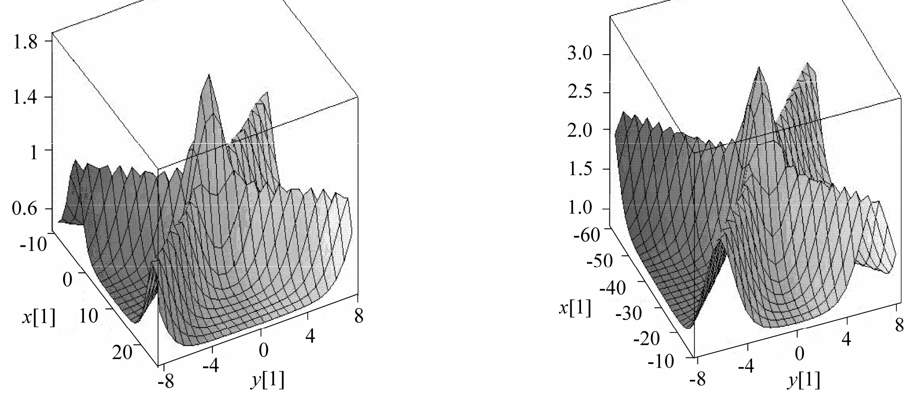
和

$$u_1=3\beta^2\exp(\varepsilon t_1^2)\sec h^2[\frac{\beta x_1}{2\exp(1/2\varepsilon)}-$$



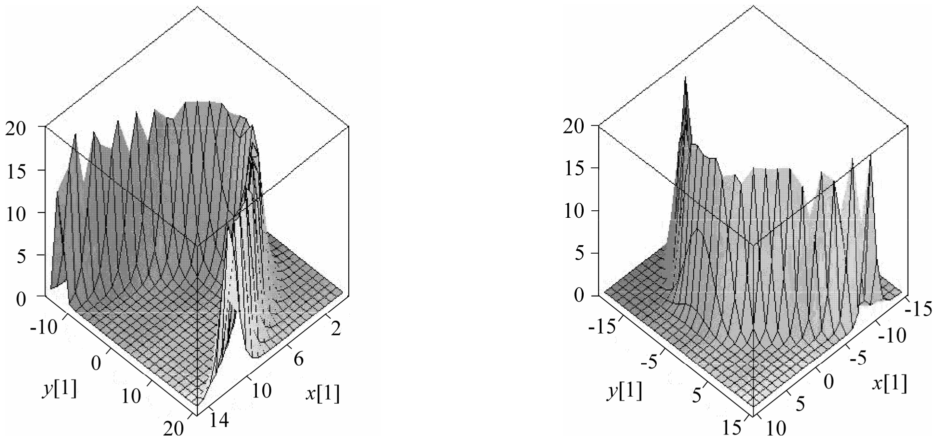
参数为 $\kappa=\pm 1$, $a=1$, $b=-1$, $\lambda=-2$, $\delta=-2$, $\varepsilon=0.1$, $c_2=1$, $t_1=1/2$

图 1　新变系数 KP 方程(22)的双孤波解



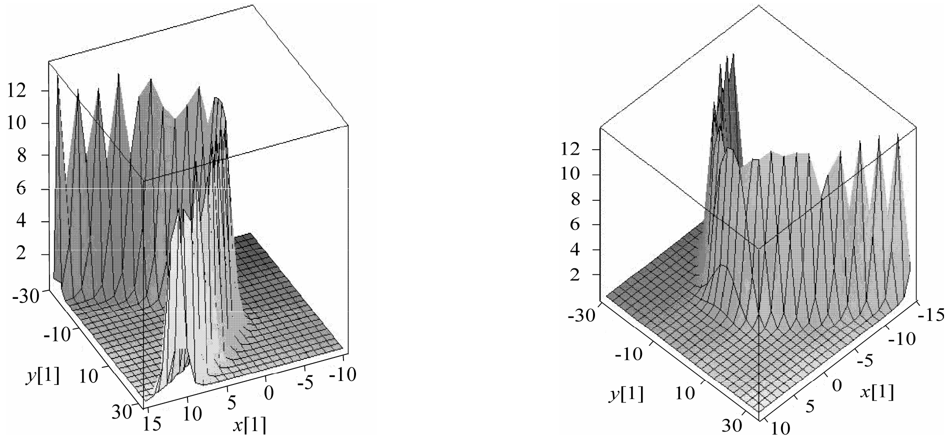
参数为 $\kappa=\pm1$，$a=1$，$b=-1$，$\lambda=-2$，$\delta=-2$，$\varepsilon=1$，$c_1=0.1$，$c_2=1/2$，$t_1=1/2,1$

图 2　新变系数 KP 方程(23)的双孤波解



参数为 $\sigma^2=\pm1$，$\lambda=\pm1$，$\beta=2$，$\gamma=1$，$\delta=1$，$\varepsilon=1/2$，$c_2=1$，$t_1=3/2$

图 3　新变系数 KP 方程(24)的单孤波解



参数为 $\sigma^2=\pm1$，$\lambda=\pm1$，$\beta=2$，$\gamma=1$，$\delta=1$，$\varepsilon=0.1$，$c_2=1$，$t_1=1/2$

图 4　新变系数 KP 方程(25)的单孤波解

$$\frac{\lambda\beta t_1 y_1^2}{24\exp(3/2\varepsilon)}-\frac{(\beta^4-\beta\delta y_1+3\lambda\delta^2)t_1}{2\beta\exp(3/2\varepsilon)}+\frac{\gamma}{2}], \tag{33}$$

他们分别是方程(24)和(25)的单孤波解，如图 3 和图 4 所示.

3　结论

笔者用推广的李群约化法研究了一般变系数

KP 方程的对称群和有限变换. 以单双孤子解为例, 通过假设 $A(x,y,t)$, $B(y)$, $D(t)$, $E(t)$ 和 $\tau(t)$ 的具体形式, 利用有限变换从经典的常系数 KP 和变系数柱 KP 方程的解得到了一些具体的变系数 KP 方程及其精确解. 在实际应用中, 可根据不同的需要选取不同的函数形式, 直接构造出这些 KP 模型的解. 所以, 推广的李群约化法在求解变系数偏微分方程中有着极为广泛的应用.

参考文献：

[1] Wang Luyun, Li Lu, Li Zhonghao, et al. Generation, compression, and propagation of pulse trains in the nonlinear Schrödinger equation with distributed coefficients[J]. Phys Rev E, 2005, 72:1-7.

[2] Fan E, Zhang H. A note on the homogeneous balance method[J]. Phys Lett A, 1998, 246:403-406.

[3] Xie Yingchao. Exact solutions of the Wick-type stochastic Kadomtsev-Petviashvili equations[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2004, 21:473-480.

[4] Ruan Hangyu, Chen Yixin. The study of exact solutions to the nonlinear schrodinger equations in optical fiber[J]. Journal of the Physical Society of Japan, 2003, 72(6): 1350-1355.

[5] Ruan Hangyu, Li Huijun. Optical solitary waves in the generalized higher order nonlinear schrödinger equation [J]. Journal of the Physical Society of Japan, 2005, 74(2): 543-546.

[6] Güngör F, Winternitz P. Generalized Kadomtsev-Petviashvili equation with an infinite-dimensional symmetry algebra[J]. J Math Anal Appl, 2002, 276:314- 328.

[7] Lv Zhuosheng, Xie Fuding. Explicit bisoliton-like solutions for a generalized KP equation with variable coefficients [J]. Mathematical and Computer Modelling, 2010, 52:1423-1427.

[8] Liu Jianguo, Li Yezhou. Auto-Bäklund transformation and exact solutions of the generalized variable-coefficient Kadomtsev-Petviashvili equation[J]. Computer Physics Communications, 2008, 179:724-732.

Exact Solutions for Variable-coefficient Kadomtsev-Petviashvili Equation

LIU Bin, RUAN Hang-yu*

(Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: Considering the variable coefficient of a non-linear equation as a new dependent variable, we have established relation among constant coefficient KP equations and some different kinds of variable coefficient KP equations using the general classical Lie approach. The solutions of these resulting equations can also be obtained via the solutions of the original models which are the standard constant coefficient KP and the variable coefficient cylindrical Kadomtsev-etviashvili equation.

Key words: KP equation with variable coefficients; generalized Lie group reduction method; extended symmetries

（责任编辑　史小丽）