高校应用数学学报
APPLIED MATHEMATICS A JOURNAL
OF CHINESE UNIVERSITIES
1999年 第14卷 第4期 Vol.14 No.4 1999

一类离散不确定线性时滞系统的鲁棒镇定

颜钢锋　林志云

摘　要　研究具有时变不确定参数的离散线性时滞系统的鲁棒控制问题，其中不确定性满足匹配条件.利用Lyapunov稳定性理论，提出了鲁棒稳定化控制器一种新的设计方法，得到了这类离散不确定线性时滞系统可鲁棒镇定的充分条件.
关键词　不确定系统，离散时滞系统，鲁棒镇定.
分类号　(中图) O231.1； (1991MR)93D09.

ROBUST STABILIZATION OF UNCERTAIN DISCRETE-TIME DELAY SYSTEM

Yan Gangfeng　Lin Zhiyun
(Dept.of Electrical Engineering,Zhejiang Univ.,Hangzhou　310027)

Abstract　The problem of the robust control for a class of descrete-time linear systems with matched uncertainties and time-delay in state is treated in this paper.In terms of Lyapunov stability theorem, a new robust controller that guarantees the closed-loop system stable is presented and a sufficient condition robust stabilizing the uncertain time-delay system is also given.
Keywords　Uncertain Systems, Discrete-time Delay Systems, Robust Stabilization.
Subject Classification　(CL)O231.1;(1991MR)93D09.

§1　引　言

近来，线性时滞系统得到广泛的重视，这是因为时滞是工业系统中普遍存在的现象，更接近于物理实际.元件老化、零点漂移以及信号传输的延迟常会导致时滞的出现.另外，实际系统的参数在扰动或其它因素的影响下会发生变化，从而使系统响应不能达到预计的要求，甚至出现不稳定，因此必须使系统对不确定参数具有鲁棒性.一些学者对该问题进行了很多研究，并取得了一些成果[1～9].文[1～4]采用H∝控制方法，对不确定动态时滞系统的鲁棒控制问题进行了研究；文[5，6]导出了保成本鲁棒控制器存在的充分条件；文[7]则给出了不确定线性时滞系统的变结构控制器；而文[8，9]则考虑了能够指数镇定该类系统的充分条件.综观已有结果，所作的研究大都是针对连续时滞系统的.

本文考虑了离散的不确定线性时滞系统的鲁棒控制问题.对满足匹配条件的离散不确定线性时滞系统，利用Lyapunov稳定性理论，导出了通过求解一个Riccati-like不等式来获得鲁棒控制器的设计方法，该控制器使得系统存在不确定性时Lyapunov函数之差△V(k)取得最小.另外，在文中给出了能够保证闭环系统稳定的不确定性的上界.最后，举例验证了本文的结果.

§2　主要结果

考虑离散的不确定线性时滞系统

$$
\begin{aligned}
&x(k+1)=(A+\Delta A(r(k)))x(k)+(A_1+\Delta A_1(v(k)))x(k-h)+(B+\Delta B(s(k)))u(k),\\
&x(k)=\varphi(k),\quad -h\leqslant k\leqslant 0,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

其中，$x\in R^n, u\in R^m$分别为系统(1)的状态向量和控制向量；A，A_1和B是适当维数的矩阵.整数$h\geqslant 0$是滞后时间，$\varphi(k)$是初始向量函数，$\Delta A(\cdot)$，$\Delta A_1(\cdot)$，$\Delta B(\cdot)$是不确定的连续函数阵，$r(k)\in R^k, v(k)\in R^h, s(k)\in R^i$为不确定参数向量.

对不确定性有如下假设：

A1)：$r(t), v(t), s(t)$是Lebesgue可测的且分别在紧集Ψ，Θ和Φ中变化，其中

$$\Psi=\{r: |r_i| \le \bar{r},\ i=1,2,\cdots,k\},\ \Theta=\{v: |v_i| \le \bar{v},\ i=1,2,\cdots,l\},$$
$$\Phi=\{s: |s_i| \le \bar{s},\ i=1,2,\cdots,m\};$$

A2)：$\Delta A(\cdot)$，$\Delta A_1(\cdot)$，$\Delta B(\cdot)$满足匹配条件且范数有界，即

$$\Delta A(r(k))=BH(r(k)),\quad \Delta A_1(v(k))=BH_1(v(k)),$$
$$\Delta B(s(k))=BE(s(k)),\quad \|H(r(k))\| \le h^*,$$
$$\|H_1(v(k))\| \le h_1^*,\quad \|E(s(k))\| \le e^* < 1.$$

对系统(1)假设

A3)：A_1可逆.

现在我们取控制率为

$$u(k)=-\frac{1}{a}(B^TPAx(k)+B^TPA_1x(k-h)), \tag{2}$$

其中　$a=\lambda max(B^TPB)$,正定矩阵P待定，则有以下定理.

定理1　对满足假定$A_1)-A_3)$的系统(1)，如果存在正常数ε和γ以及正定矩阵P使得不等式

$$\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)A^TPA+(1+\gamma)A_1{}^TPA_1+\varphi I_n-P<0 \tag{3}$$

成立，其中$\varphi=\dfrac{\alpha}{1-e^{*2}}[(1+\varepsilon)h^{*2}+(1+\dfrac{1}{\varepsilon})h_1{}^{*2}]$，则由(2)给出的控制律鲁棒镇定系统(1).

证　因为$\alpha=\lambda_{max}(B^TPB)$,则可知必存在半正定矩阵S，即S≥0，使得

$$S+B^TPB=\lambda_{max}(B^TPB)I_m=\alpha I_m.$$

记

$$S_1(k)=[u(k)+e(k)]^TS[u(k)+e(k)],$$
$$e(k)=H(r(k))x(k)+H_1(v(k))x(k-h)+E(s(k))u(k),$$
$$\beta(k)=H(r(k))x(k)+H_1(v(k))x(k-h),$$
$$R(k)=B^TPAx(k)+B^TPA_1x(k-h).$$

取Lyapunov函数为

$$V(x(k))=V_1(x(k))+V_2(x(k))=x^T(k)Px(k)+\sum_{i=0}^{h-1}x^T(k-h+i)[\frac{\alpha}{1-e^{*2}}(1+\frac{1}{\varepsilon})h_1{}^{*2}I_n+(1+\gamma)A_1{}^TPA_1]x(k-h+i), \tag{4}$$

则沿系统(1)可知

$$\Delta V_1(x(k)) = [Ax(k)+A_1x(k-h)]^TP[Ax(k)+A_1x(k-h)] - x^T(k)Px(k) + 2[u(k)+e(k)]^TR(k) + \alpha[u(k)+e(k)]^T[u(k)+e(k)] - S_1(k) =$$

$$[Ax(k)+A_1x(k-h)]^TP[Ax(k)+A_1x(k-h)] - x^T(k)Px(k) +$$

$$\alpha\left[u(k)+\beta(k)+\frac{1}{\alpha}R(k)\right]^T(1-EE^T)^{-1}\left[u(k)+\beta(k)+\frac{1}{\alpha}R(k)\right]+$$

$$\alpha\left[u(k)+\frac{1}{\alpha}R(k)\right]^T\left[u(k)-\frac{1}{\alpha}R(k)\right]-\alpha G^T(k)(1-E^TE)G(k)-S_1(k),$$

其中 $G(k)=u(k)-(1-E^TE)^{-1}E^T[u(k)+\beta(k)+\frac{1}{\alpha}R(k)]$.

由于$G^T(k)(1-E^TE)G(k)$和$S_1(k)$都是半正定的，则可知

$$\Delta V_1(x(k)) \le [Ax(k)+A_1x(k-h)]^TP[Ax(k)+A_1x(k-h)] - x^T(k)Px(k) + \alpha[u(k)+\beta(k)+\frac{1}{\alpha}R(k)]^T(1-EE^T)^{-1}[u(k)+\beta(k)+\frac{1}{\alpha}R(k)]^T + \alpha[u(k)+\frac{1}{\alpha}R(k)]^T[u(k)-\frac{1}{\alpha}R(k)].$$

显然，取$u(k)=-\frac{1}{\alpha}R(k)$可以使上述不等式右边部分最小，同时利用假设A2)，即可得：

$$\Delta V_1(x(k)) = [Ax(k)+A_1x(k-h)]^TP[Ax(k)+A_1x(k-h)] - x^T(k)Px(k) + \frac{\alpha}{1-e^{*2}}\beta^T(k)\beta(k) \le \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-h) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^TPA-P & A^TPA_1 \\ A_1{}^TPA & A_1{}^TPA_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-h) \end{bmatrix} +. \frac{\alpha}{1-e^{*2}}[(1+\varepsilon)h^{*2}x^T(k)x(k)+(1+\frac{1}{\varepsilon})h_1{}^{*2}x^T(k-h)x(k-h)].$$

又因为

$$\Delta V_2(x(k)) = x^T(k)\left[\frac{\alpha}{1-e^{*2}}(1+\frac{1}{\varepsilon})h_1{}^{*2}I_n+(1+\gamma)A_1{}^TPA_1\right]x(k) - x^T(k-h)\left[\frac{\alpha}{1-e^{*2}}(1+\frac{1}{\varepsilon})h_1{}^{*2}I_n+(1+\gamma)A_1{}^TPA_1\right]x(k-h).$$

故

$$\Delta V(x(k)) = \Delta V_1(x(k)) + \triangle V_2(x(k)) \le \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-h) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^TPA+(1+\gamma)A_1{}^TPA_1+\varphi I_n-P & A^TPA_1 \\ A_1{}^TPA & -\gamma A_1{}^TPA_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-h) \end{bmatrix},$$

其中 $\varphi=\frac{\alpha}{1-e^{*2}}[(1+\varepsilon)h^{*2}+(1+\frac{1}{\varepsilon})h_1{}^{*2}]$.

根据假设A3)及Schur补可知条件(3)与以下条件等价，即

$$\begin{bmatrix} A^TPA+(1+\gamma)A_1{}^TPA_1+\varphi I_n-P & A^TPA_1 \\ A_1{}^TPA & -\gamma A_1{}^TPA_1 \end{bmatrix} < 0.$$

因此可知，$\Delta(x(k))<0$，根据Lyapunov稳定性理论，即可知系统(1)满足条件(3)时，可被控制律(2)鲁棒镇定.

记$e(k)=H(r(k))x(k)+H_1(v(k))x(k-h)+E(s(k))u(k)$，

$$\Omega \triangleq \{e(k): \|H(r(k))\| \leq h^*, \|H_1(v(k))\| \leq h_1^*, \|E(s(k))\| \leq e^*<1\}.$$

则有以下定理2.

定理2　给定离散不确定线性时滞系统(1)及Lyapunov函数(4)，则采用鲁棒控制律

$$u^*(k)=-\frac{1}{\alpha}[B^TPAx(k)+B^TPA_1x(k-h)] \tag{5}$$

可使下述边界条件满足，即

$$\max_{e\in\Omega}\Delta V(x(k),u^*(k),e(k)) \leq -(\lambda_{\min}(Q)-\varphi)\|x(k)\|-\lambda_{\min}(Q)\|x(k-h)\|, \tag{6}$$

其中

$$Q=\begin{bmatrix} P-A^TPA-(1+\gamma)A_1{}^TPA_1 & -A^TPA_1 \\ -A_1{}^TPA & \gamma A_1{}^TPA_1 \end{bmatrix},$$ φ与定理1中相同.

(证略).

当系统(1)中矩阵A，A_1为不稳定矩阵时，可采用极点配置的方法将系统矩阵配置在稳定域内，并尽量靠近原点，即可保证不等式(3)有解.

§3　例　子

考虑离散不确定线性时滞系统，并且具有(1)中的形式

其中

$$A=\begin{bmatrix}0.3 & 0.27\\0.1 & 0.15\end{bmatrix}, A_1=\begin{bmatrix}0.2 & 0.3\\0.1 & 0.08\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0.4 & 0.53\\0.35 & 0.8\end{bmatrix}.$$

另外，不确定部分满足范数有界条件，并且

$$h^*=0.2,\quad h_1^*=0.15,\quad e^*=0.1.$$

易验证，取　$\gamma=1$，　$\varepsilon=1$，　$P=\begin{bmatrix}2.3 & 0.8\\0.8 & 3.12\end{bmatrix}$时，条件(3)成立.

则即可获得鲁棒控制律

$$u(k)=-\begin{bmatrix}0.1174 & 0.1255\\0.1991 & 0.2202\end{bmatrix}x(k)-\begin{bmatrix}0.0893 & 0.1108\\0.1555 & 0.1854\end{bmatrix}x(k-h)$$

鲁棒镇定该系统.

§4　结　论

本文研究了实际过程中常见的具有时滞，不确定性等特性的离散系统，具有一定的理论价值和工

程意义.对该系统给出了存在鲁棒镇定控制器的充分条件，并给出比较简单的控制器设计方法，举例说明了本方法的有效性和可行性.

作者单位：杭州市浙江大学电机系　　邮编 310027

参考文献

1　Niculescu,S.I.,H_∞ Memoryless control with an α-stability constraint for time-delay systems: An LMI approach,IEEE Trans.Automat.Control，1998,43(5):739～748.
2　Shaked,U. and Yaesh,I., H_∞ static output-feedback control of linear continuous-time systems with delay, IEEE Trans.Automat.Control,1998,43(10):1431～1436.
3　Song,S.H.and Kim,J.K.,H_∞ control of discrete-time linear systems with norm-bounded uncertainties and time-delay in state,Automatica,1998,34(1):137～139.
4　Shieh,L.S.,Wang,W.and Jason Tsai,J.S.H.,Digital redesign of H_∞ via bilinear approximation method for state-delayed systems,Internat J.Control,1998,70(5):665～683.
5　Li,H.,Niculescu,S.I.and Dugard, L., et al.,Robust guaranteed cost control of uncertain linear time-delay systems using dynamic output feedback,Mathematics and Computers in Simulation,1998,45:349～358.
6　Moheimani,S.O.R.and Petersen,I.R.,Optimal quadratic guaranteed cost control of a class of uncertain time-delay systems, IEEE Proc.-Control Theory Appl.,1997,144(2):183～188.
7　El-Khazali,R.,Variable structure robust control of uncertain time-delay systems,Automatica,1998,34(3):327～332.
8　Kubo,T.and Shimemura,E.,Exponential stabilization of systems with time-delay by optimal memoryless feedback,Mathematics and Computers in Simulation,1998,45:319～328.
9　Sun,Y.,Hsieh,J.and Hsieh,Y.,Exponential stability criterion for uncertain retarded systems with multiple time-varying delays,Journal of Mathematical Analysis and Applications,1996,201:430～445.

收稿：1999-06-21.