高校应用数学学报
APPLIED MATHEMATICS A JOURNAL
OF CHINESE UNIVERSITIES
1999年 第14卷 第4期 Vol.14 No.4 1999

三角形受限制插值与12参高精度板元

陈绍春　吴端恭

摘　要　本文讨论三角形上在一定限制条件下的多项式插值问题，并将其应用于构造高精度双参数12参三角形板元.
关键词　受限制插值，高精度三角形板元，双参数法.
分类号　(中图) O241.3；(1991MR)65N15，65N30.

INTERPOLATION ON TRIANGLE UNDER CONSTRAINTS AND 12-PARAMETER PLATE ELEMENTS WITH HIGH ACCURACY

Chen Shaochun
(Dept.of Math.,Zhengzhou University,Zhengzhou 450052)
Wu Duangong
(Fisheries College of Xiamen Univ.,Xiamen 361021)

Abstract　In this paper, the interpolations on a triangle under constraints are disscussed.By this method the 12-parameter triangle plate elements with error $O(h^2)$ are presented.
Keywords　Interpolation under Constraints, Triangle Plate Element with High Accuracy, Double Set Parameter Method.
Subject Classification　(CL)O241.3;(1991MR)65N15，65N30.

§1　引　言

九参三角形板元的误差阶都是$O(h)$,h是最大单元长度.近来［1，2］发现若单元形函数外法向导数的平均连续性在某种意义下提高一阶，可使相容误差达到$O(h^2)$，另外若单元插值对3次多项式精确成立，逼近误差也达到$O(h^2)$，从而使整体误差达到$O(h^2)$.12参三角形板元可满足上述要求，这一方面需要自由度取成适当的形式，另一方面需要形函数空间P_K包含完整的3次多项式空间$P_3(K)$，且自由度能唯一确定P_K中的元素，这成为一个受限制插值问题.［2］中取$P_K=P_3(K)\cup\{\varphi_1,\varphi_2\}$，$\varphi_1$，$\varphi_2$是4次多项式，如何选择$\varphi_1$，$\varphi_2$使单元插值唯一可解，不是容易的事.［2］用待定系数的方法选择φ_1，φ_2，这种方法的优点是约束条件$P_3(K)\subset P_K$自动满足，缺点是方法很难一般化.本文对多项式空间改用齐次基，给出$P_3(K)\subset P_K$的约束表达式，连同12个自由度确定$P_4(K)$中元素，由此自动筛选出适定的P_K来.由于对任何次数和维数的多项式空间都可方便地给出齐次基函数，因此本文提出的方法具有一般性.这一方法在其它形式单元构造中的应用将另文叙述.

§2　$P_4(K)$中元素属于$P_3(K)$的约束条件

设三角形单元K的面积坐标、顶点、边及边上外法向向量分别为λ_i, $a_i(x_i,y_i)$, F_i, n_i, $i=1,2,3$，采用齐次基，$P_4(K)$的元素可表成

$$v=\sum_{i+j+k=4}\rho_{ijk}\lambda_1^i\lambda_2^j\lambda_3^k=\rho_{400}\lambda_1^4+\rho_{040}\lambda_2^4+\rho_{004}\lambda_3^4+\rho_{310}\lambda_1^3\lambda_2+\rho_{130}\lambda_1\lambda_2^3+$$
$$\rho_{031}\lambda_2^3\lambda_3+\rho_{013}\lambda_2\lambda_3^3+\rho_{103}\lambda_3^3\lambda_1+\rho_{301}\lambda_3\lambda_1^3+\rho_{220}\lambda_1^2\lambda_2^2+$$
$$\rho_{022}\lambda_2^2\lambda_3^2+\rho_{202}\lambda_3^2\lambda_1^2+\rho_{211}\lambda_1^2\lambda_2\lambda_3+\rho_{121}\lambda_1\lambda_2^2\lambda_3+\rho_{112}\lambda_1\lambda_2\lambda_3^2.$$

(1)

若同时$v\in P_3(K)$,则v可表成

$$v=\sum_{i+j+k=3} b_{ijk}\lambda_1^i\lambda_2^j\lambda_3^k=b_{300}\lambda_1^3+b_{030}\lambda_2^3+b_{003}\lambda_3^3+b_{210}\lambda_1^2\lambda_2+$$

$$b_{120}\lambda_1\lambda_2^2+b_{021}\lambda_2^2\lambda_3+b_{012}\lambda_2\lambda_3^2+b_{102}\lambda_3^2\lambda_1+b_{201}\lambda_3\lambda_1^2+b_{111}\lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

因为$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$，所以上式也可表成4次形式

$$v=\left(\sum_{i+j+k=3} b_{ijk}\lambda_1^i\lambda_2^j\lambda_3^k\right)(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3).$$

(2)

比较(1)(2)式同类项系数，得15个等式，从中消去b_{ijk}共10个，得

$$\begin{cases}\rho_{400}+\rho_{040}-\rho_{310}-\rho_{130}+\rho_{220}=0,\\ \rho_{040}+\rho_{004}-\rho_{031}-\rho_{013}+\rho_{022}=0,\\ \rho_{400}+\rho_{004}-\rho_{103}-\rho_{301}+\rho_{202}=0,\\ 2\rho_{400}-2\rho_{040}-\rho_{310}+\rho_{130}+\rho_{031}-\rho_{301}+\rho_{211}-\rho_{121}=0,\\ 2\rho_{040}-2\rho_{004}-\rho_{130}-\rho_{031}+\rho_{013}+\rho_{103}+\rho_{121}-\rho_{112}=0.\end{cases}$$

(3)

定理1 $P_4(K)$中元素v属于$P_3(K)$的充要条件是v的系数ρ_{ijk}满足(3)式.

§3 三角形12参高精度板元

考虑板弯曲问题：求$u\in H^2_0(\Omega)$满足

$$a(u,\upsilon)=f(\upsilon),\quad \forall \upsilon\in H^2_0(\Omega),$$

(4)

其中$a(u,\upsilon)=\int_\Omega A(u,v)\,dxdy$, $f(\upsilon)=\int_\Omega f\upsilon\,dxdy$,

$$A(u,v)=\Delta u\Delta v+(1-\delta)\left(2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right),$$

Ω是R中凸多边形，$f\in L^2(\Omega)$，$\delta\in(0，0.5)$是Poisson比.

对Ω进行正则三角形剖分[3]，在每个单元K上定义一个形函数空间P_K和节点参数，得到有限元空间V_h,(4)的有限元近似是：求$u_h\in V_h$满足

$$a_h(u_h,v_h)=f(v_h),\quad \forall v_h\in V_h,$$

(5)

其中$a_h(u_h,v_h)=\sum_k\int_K A(u_h,v_h)\,dxdy$.

假定u和u_h分别是(4)和(5)的解，由Strang引理[3]，有如下误差估计：

$$|u-u_h|_{2,h}\leqslant c\left(\inf_{v_h\in V_h}|u-v_h|_{2,h}+\sup_{w_h\in V_h}\frac{|E_h(u,w_h)|}{|w_h|_{2,h}}\right),$$

(6)

其中离散半模定义为$|v_h|^2_{2,h}=\sum_K|v_h|^2_{2,K}$,

$$E_h(u,w)=\sum_k\int_K\left\{\left[\Delta u-(1-\delta)\frac{\partial^2 u}{\partial S^2}\right]\frac{\partial w}{\partial n}+\right.$$

$$\left.(1-\delta)\frac{\partial^2 u}{\partial n\partial S}\frac{\partial w}{\partial S}-\frac{\partial(\Delta u)}{\partial n}w\right\}\mathrm{d}S\cdot$$

(6)的首项是插值误差，第2项称为相容误差，由形函数跨过单元边界的非协调性所致.

定理2 [3] 设π_K是由形函数空间P_K和确定P_K中元素的方式定义的插值算子，若π_K对$P_3(K)$中元素精确成立，则

$$|u-\pi_k u|_{2,K}\leqslant ch^2_K|u|_{4,K}\cdot$$

(7)

定理3 [2] 对于任意的$v_h\in V_h$，若v_h满足：1) v_h在单元顶点连续，在位于边界$\partial\Omega$上的单元顶点处为零，2) $\int_F v_h\mathrm{d}S$在单元边界F两侧连续，当$F\subset\partial\Omega$时为零，3) $\forall p(s)\in P_1(F)$, $\int_F p(s)\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}S$在单元边界F两侧连续当$F\subset\partial\Omega$时为零，则

$$\sup_{w_h\in V_h}\frac{|E_h(u,w_h)|}{|w_n|_{2,h}}\leqslant ch^2|u|_4\cdot$$

(8)

根据定理3，取12个自由度为

$$\boldsymbol{D}(v)=\left(v_1,v_2,v_3,\frac{20}{|F_1|}\int_{F_1}v\mathrm{d}s,\frac{20}{|F_2|}\int_{F_2}v\mathrm{d}s,\frac{20}{|F_3|}\int_{F_3}v\mathrm{d}s,-24\int_{F_1}\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}s,-24\int_{F_2}\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}s,\right.$$

$$\left.-24\int_{F_3}\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}s,-120\int_{F_1}\lambda_2\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}s,-120\int_{F_2}\lambda_3\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}s,-120\int_{F_3}\lambda_1\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}s\right)^T\cdot$$

(9)

形函数空间P_K取为$P_K\subset P_4(K)$，通过对$P_4(K)$施加3个独立的约束条件而得到. 设$v\in P_k$，表达式如(1)式，3个约束条件取为形如：$\sum_{i+j+k=4}X^{(l)}_{ijk}\rho_{ijk}=0, l=1,2,3$, 系数$X^{(1)}_{ijk}$保证满足$P_3(K)\subset P_K$, 这样

$$P_K=\left\{v\in P_4(K)\,|\sum_{i+j+k=4}X^{(l)}_{ijk}\rho_{ijk}=0,\ l=1,2,3\right\}\cdot$$

(10)

令$b_i=y_{i+1}-y_{i-1}$, $c_i=x_{i-1}-x_{i+1}$, $r_i=(b_{i+1}b_{i-1}+c_{i+1}c_{i-1})/\Delta(\mathrm{mod}\ 3)$，$\Delta$是K的面积，$t_i=|F_i|^2=$

$(b^2_i+c^2_i)/\Delta$, i=1,2,3易知

$$\begin{cases}\sum_{i=1} b_i = \sum_{i=1} c_i = 0,\ r_{i+1}+r_{i-1} = -t_i,\ n_i = \left(-\dfrac{b_i}{|F_i|}, \dfrac{c_i}{|F_i|}\right), \\ \dfrac{\partial\lambda_i}{\partial x} = \dfrac{b_i}{2\Delta},\ \dfrac{\partial\lambda_i}{\partial y} = \dfrac{c_i}{2\Delta}, \quad i = 1,2,3.\end{cases} \tag{11}$$

将(1)代入(9)，经过计算，连同(10)式3个约束条件，结果可表成：$SE=D^*(v)$，其中$E=(\rho_{400}, \rho_{040}, \rho_{004}, \rho_{310}, \rho_{130}, \rho_{031}, \rho_{013}, \rho_{103}, \rho_{301}, \rho_{220}, \rho_{022}, \rho_{202}, \rho_{211}, \rho_{121}, \rho_{112})^T$, $D^*(v)^T=(D(v)^T, 0, 0, 0)$.

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{S}_{11} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{S}_{21} & \boldsymbol{S}_{22} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{S}_{11}\text{ 为三阶单位阵} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{S}_{21}^T = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 & 0 & 12r_3 & 12r_2 & 0 & 12r_3 & 48r_2 & X_{400}^{(1)} & X_{400}^{(2)} & X_{400}^{(3)} \\ 4 & 0 & 4 & 12r_3 & 0 & 12r_1 & 48r_3 & 0 & 12r_1 & X_{040}^{(1)} & X_{040}^{(2)} & X_{040}^{(3)} \\ 4 & 4 & 0 & 12r_2 & 12r_1 & 0 & 12r_2 & 48r_1 & 0 & X_{004}^{(1)} & X_{004}^{(2)} & X_{004}^{(3)} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{S}_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 3t_2 & -3t_3 & 0 & 3t_2 & 9r_2+12r_1 & X_{310}^{(1)} & X_{310}^{(2)} & X_{310}^{(3)} \\ 0 & 0 & 1 & 3t_1 & 0 & -3t_3 & 12t_1 & 0 & 3r_2+6r_1 & X_{130}^{(1)} & X_{130}^{(2)} & X_{130}^{(3)} \\ 1 & 0 & 0 & -3t_1 & 0 & 3t_3 & 9r_3+12r_2 & 0 & 3t_3 & X_{031}^{(1)} & X_{031}^{(2)} & X_{031}^{(3)} \\ 1 & 0 & 0 & -3t_1 & 3t_2 & 0 & 3r_3+6r_2 & 12t_2 & 0 & X_{013}^{(1)} & X_{013}^{(2)} & X_{013}^{(3)} \\ 0 & 1 & 0 & 3t_1 & -3t_2 & 0 & 3t_1 & 12r_3+9r_1 & 0 & X_{103}^{(1)} & X_{103}^{(2)} & X_{103}^{(3)} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3t_2 & 3t_3 & 0 & 6r_3+3r_1 & 12t_3 & X_{301}^{(1)} & X_{301}^{(2)} & X_{301}^{(3)} \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 & 0 & -2t_3 & 0 & 0 & 4r_2+6r_1 & X_{220}^{(1)} & X_{220}^{(2)} & X_{220}^{(3)} \\ 2/3 & 0 & 0 & -2t_1 & 0 & 0 & 4r_3+6r_2 & 0 & 0 & X_{022}^{(1)} & X_{022}^{(2)} & X_{022}^{(3)} \\ 0 & 2/3 & 0 & 0 & -2t_2 & 0 & 0 & 6r_3+4r_1 & 0 & X_{202}^{(1)} & X_{202}^{(2)} & X_{202}^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_2 & t_3 & 0 & 2t_2 & 3t_3 & X_{211}^{(1)} & X_{211}^{(2)} & X_{211}^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & t_1 & 0 & t_3 & 3t_1 & 0 & 2t_3 & X_{121}^{(1)} & X_{121}^{(2)} & X_{121}^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & t_1 & t_2 & 0 & 2t_1 & 3t_2 & 0 & X_{112}^{(1)} & X_{112}^{(2)} & X_{112}^{(3)} \end{pmatrix}^T.$$

$$\det S=\det S_{22}=-6^3(t_1t_2t_3)^2\det S^*.$$

$$\det \boldsymbol{S}^* = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & -4 & -1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 2 & 0 & -4 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & -1 & 0 & -4 & 3 & 2 & 0 \\ \tilde{X}_1^{(1)} & \tilde{X}_2^{(1)} & \tilde{X}_3^{(1)} & \tilde{X}_4^{(1)} & \tilde{X}_5^{(1)} & \tilde{X}_6^{(1)} & \tilde{X}_7^{(1)} & \tilde{X}_8^{(1)} & \tilde{X}_9^{(1)} \\ \tilde{X}_1^{(2)} & \tilde{X}_2^{(2)} & \tilde{X}_3^{(2)} & \tilde{X}_4^{(2)} & \tilde{X}_5^{(2)} & \tilde{X}_6^{(2)} & \tilde{X}_7^{(2)} & \tilde{X}_8^{(2)} & \tilde{X}_9^{(2)} \\ \tilde{X}_1^{(3)} & \tilde{X}_2^{(3)} & \tilde{X}_3^{(3)} & \tilde{X}_4^{(3)} & \tilde{X}_5^{(3)} & \tilde{X}_6^{(3)} & \tilde{X}_7^{(3)} & \tilde{X}_8^{(3)} & \tilde{X}_9^{(3)} \end{vmatrix}$$

其中$\tilde{X}^{(i)}{}_1=(X^{(i)}{}_{130}-X^{(i)}{}_{310})/3$, $\tilde{X}^{(i)}{}_2=(X^{(i)}{}_{013}-X^{(i)}{}_{031})/3$, $\tilde{X}^{(i)}{}_3=(X^{(i)}{}_{301}-X^{(i)}{}_{103})/3$, $\tilde{X}^{(i)}{}_4=(X^{(i)}{}_{220}-\frac{2}{3}X^{(i)}{}_{130})/2$, $\tilde{X}^{(i)}{}_5=(X^{(i)}{}_{022}-\frac{2}{3}X^{(i)}{}_{013})/2$, $\tilde{X}^{(i)}{}_6=(X^{(i)}{}_{202}-\frac{2}{3}X^{(i)}{}_{301})/2$, $\tilde{X}^{(i)}{}_7=X^{(i)}{}_{211}$, $\tilde{X}^{(i)}{}_8=X^{(i)}{}_{121}$, $\tilde{X}^{(i)}{}_9=X^{(i)}{}_{112}$, $i=1,2,3$.

通过化简依次按1，…，6行展开得

$$\det \boldsymbol{S}=-120(6t_1t_2t_3)^2\begin{vmatrix} S_{11}^* & S_{12}^* & S_{13}^* \\ S_{21}^* & S_{22}^* & S_{23}^* \\ S_{31}^* & S_{32}^* & S_{33}^* \end{vmatrix}. \tag{13}$$

其中

$$S^*{}_{i1}=-\frac{1}{3}(X^{(i)}{}_{310}+X^{(i)}{}_{130}+X^{(i)}{}_{031}+X^{(i)}{}_{013}+X^{(i)}{}_{103}+X^{(i)}{}_{301}+X^{(i)}{}_{220}+X^{(i)}{}_{022}+X^{(i)}{}_{202}+X^{(i)}{}_{211}+X^{(i)}{}_{121}+X^{(i)}{}_{112}),$$

$$S^*{}_{i2}=-\frac{1}{3}(X^{(i)}{}_{310}+X^{(i)}{}_{301})+\frac{1}{2}(X^{(i)}{}_{220}+X^{(i)}{}_{202})+X^{(i)}{}_{211},$$

$$S^*{}_{i3}=-\frac{1}{3}(X^{(i)}{}_{130}+X^{(i)}{}_{031})+\frac{1}{2}(X^{(i)}{}_{220}+X^{(i)}{}_{022})+X^{(i)}{}_{121},\quad i=1,2,3.$$

定理4　自由度(9)式能唯一确定P_K中元素的充要条件是(10)式中约束条件系数使(13)式的3阶行列式不为零.

取(3)中等式作为约束条件，对应(3)的第一式有：$X_{310}=-1, X_{130}=-1, X_{220}=1$，$X_{400}=X_{040}=1$；其余的$X_{ijk}=0$. 代入$S^*{}_{ij}$表达式得$S^*{}_{i1}=5/3$，$S^*{}_{i2}=5/6$，$S^*{}_{i3}=5/6$. 对(3)的其余等式同样可算得$S^*{}_{ij}$的值，将其排成一个矩阵，为

$$\frac{5}{6}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

(14)的任意3行组成一个方阵，共10种，可验证，除第1，3，5行和第2，3，4行构成奇异矩阵外，其余8种情况均构成非奇矩阵，即它们使(13)的行列式不为零.

定理5　取(3)中等式或其线性组合作为(10)式中的约束条件，则有$P_3(K)\subset P_K$.

证　$\forall v\in P_3(K)$，由定理1，v作为$P_4(K)$中元素满足(3)式，因而满足(10)中约束条件，由P_K定义得$v\in P_K$.

例　1) 取(3)的第1，2，3式作为(10)的约束条件，由以上分析及定理4，定理5得$P_3(K)\subset P_K$且自由度(9)能唯一确定P_K中元素. 显然$\lambda^2{}_1\lambda_2\lambda_3$，$\lambda_1\lambda^2{}_2\lambda_3$满足此3个约束条件，所以

$$P_K=P_3(K)\cup\{\lambda^2{}_1\lambda_2\lambda_3,\ \lambda_1\lambda^2{}_2\lambda_3\}.$$

2) 取(3)的第1，4，5式或第2，4，5式或第3，4，5式作为(10)的约束条件，同理$P_3(K)\subset P_K$且自由度(9)能唯一确定P_K中元素，这时

$P_K=P_3(K)\cup\{\lambda^2{}_2\lambda^2{}_3,\ \lambda^2{}_3\lambda^2{}_1\}$或$P_K=P_3(K)\cup\{\lambda^2{}_3\lambda^2{}_1,\lambda^2{}_1\lambda^2{}_2\}$ 或$P_K=P_3(K)\cup\{\lambda^2{}_1\lambda^2{}_2,\ \lambda^2{}_2\lambda^2{}_3\}$，

［2］用其它方法也得到上述1)，2)中的P_K形式.

3) 取(3)的第1，2，4式作为(10)的约束条件，得$P_K=P_3(K)\cup\{\lambda^2{}_3\lambda^2{}_1,\ \lambda^3{}_3\lambda_1\}$.还可举出别的情况，同时也可用(3)的线性组合作为约束条件，等等.

自由度(9)形式复杂，不便应用，我们用双参数法[4]将其化简，取节点参数为

$$Q(v)=(v_1,v_{1x},v_{1y},v_{12,n},v_2,v_{2x},v_{2y},v_{23,n},v_3,v_{3x},v_{3y},v_{31,n})^T, \tag{15}$$

其中$v_i=v(a_i)$，$v_{ix}=\frac{\partial v}{\partial x}(a_i)$，$v_{iy}=\frac{\partial v}{\partial y}(a_i)$，$v_{ij,n}=\frac{\partial v}{\partial n_k}(a_{ij})$，$i\neq i\neq k$，$a_{ij}=(a_i+a_j)/2$为边$a_ia_j$中点.

将自由度(9)离散成节点参数(15)的线性组合：v_i取精确值，$\int_{F_i}v\mathrm{d}s$用F_i上的3次Hermite插值导出的数值积分公式，$\int_{F_i}\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}s$和$\int_{F_i}\lambda_{i+1}\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}s$用Simpson求积公式，积分误差为$O(h^3|v|_{4,K})$，离散结果可表成：

$$D(v)=GQ(v)+O(h^3|v|_{4,K}). \tag{16}$$

其中G为12×12矩阵，表达式可参见［2］.

由于$E=S^{-1}D^*(v)$，记R为S^{-1}的前12列组成的15×12矩阵，则$E=S^{-1}D^*(v)=RD(v)$,代入(16)式并略去余项得

$$E=RGQ(v). \tag{17}$$

这即是由节点参数(15)确定P_K中元素的插值方式，形式简单的节点参数Q(v)作为最后的自由度，自由度D(v)不显式出现.

定理6　由上述方式构造的12参双参数板元具有误差阶：

$$|u-u_h|_{2,h}=O(h^2|u|_4). \tag{18}$$

证　记由(17)式确定的有限元插值算子为π_K，由单元构造方式知$P_3(K)\subset P_K$，再由(16)式知π_K对$P_3(K)$中元素精确成立，这样由定理2得

$$\inf_{v_h\in V_h}|u-v_h|_{2,h}\leqslant|u-\pi_hu|_{2,h}\leqslant\sum_K|u-\pi_Ku|_{2,K}\leqslant ch^2|u|_4. \tag{19}$$

由D(v)对Q(v)的离散方式知，v_i取精确值，D(v)其余分量离散时只用到该边上的节点参数和几何量，所以它们仍在单元间连续，由于1和λ_{i+1}是$P_1(F_i)$的两个基函数，因而满足定理3的3个条件，这样(8)式成立，(19)和(8)代入(6)式即得(18)式.

国家自然科学基金项目(19871079)和河南省自然科学基金项目(984050800).

作者单位：郑州市郑州大学数学系　邮编 450052　陈绍春
集美大学水产学院　吴端恭

参考文献

1　Shi,Z.C.,On the accuracy of the quasi-conforming and generalized conforming finite elements,Chinese Ann.Math.Ser.B,1990,11:148～155.
2　Shi,Z.C.,Chen,S.C. and Huang, H.C.,Plate elements with high accuracy,In:Li,T.T.ed.,Collec.Papers on Geom.Anal.Math.Phys.(纪念谷超豪教授70寿辰文集),World Scientific,Singapore,1997,155～164.
3　Ciarlet,P.G.,The Finite Element Method for Elliptic Problems,North-Holland,Amsterdam,1978.
4　陈绍春，石钟慈，构造单元刚度矩阵的双参数法，计算数学，1991，3：286～296.

收稿：1997-11-04.