高校应用数学学报
APPLIED MATHEMATICS A JOURNAL OF CHINESE UNIVERSITIES
1999年　第14卷　第3期　Vol.14　No.3　1999

油藏数值模拟中动边值问题的迎风差分格式

崔明荣

摘　要　考虑了三维油藏数值模拟中的动边值问题，对压力方程，给出中心差分格式；对饱和度方程给出隐式迎风差分格式及修正的迎风差分格式，并证明了格式的收敛性. 数值算例与理论分析结果是一致的.

关键词　数值模拟，动边界，迎风差分格式.
分类号　(中图)O241.82；(1991MR)65M10，65N10.

UPWIND DIFFERENCE SCHEMES FOR MOVING BOUNDARY PROBLEMS IN THE SIMULATION OF A PETROLEUM BASIN

Cui Mingrong
College of Mathematics and System Science，*Shandong University*，*Jinan*　250100

Abstract：In this paper，the moving boundary problems in the simulation of a petroleum bas in are considered. Central difference scheme for the pressure equation，implicit upwind difference scheme and modified implicit upwind scheme for the concentration equation are given with convergence analysis.The theoretical results are illustrated by numerical examples.

Keywords：Numerical Simulation，Moving Boundary，Upwind Difference Scheme.
Subject Classification　(CL)O241.82；(1991MR)65M10，65N10.

§1　引言

在评价一个盆地的油气资源时，需要利用计算机来数值模拟地下石油的生成、运移和聚集历史，从而为估计地下油气储量，确定开采方案提供依据.

问题的数学模型是一组非线性偏微分方程的动边值问题，其中的饱和度方程是一对流扩散方程. 由于对流为主的扩散方程具有双曲特性，中心差分格式[1]虽关于空间步长具有二阶精度，但会产生数值弥散和非物理力学特性的数值振荡，使数值模拟失真. 特征方法与标准的有限差分方法结合起来可以较好地反映出对流扩散方程的一阶双曲特性，从而减少误差，提高计算精度. 1994年，袁益让教授对油藏数值模拟中的活动边界问题，给出特征差分格式并证明了格式的最优l^2模收敛性[2]. 由于特征线在求解区域边界附近可能穿出边界，需要作特殊的处理. 为避免此困难，可以采用迎风格式，该格式可以克服数值振荡. 普通的迎风格式只有一阶精度，修正的迎风格式[3，4]可以把空间的计算精度提高至二阶，数值结果较好. 对多孔介质中的混溶驱动问题，梁栋教授给出一类广义迎风格式和理论分析[5]. 本文考虑了三维油藏数值模拟中的动边值问题，克服了边界移动带来的困难，对压力方程给出中心差分格式，对饱和度方程分别给出隐式迎风差分格式及修正的迎风差分格式，并证明了格式的最优l^2模收敛性. 最后给出的数值算例与理论分析结果是一致的.

§2　盆地发育中的动边值问题

考虑在重力，毛管力和浮力作用下盆地发育中的动边值问题[6]：

$$
\begin{cases}
\nabla\cdot u = Q(s,x,t), \quad x=(x_1,x_2,x_3)\in\Omega(t), t\in J=(0,T], & (2.1a)\\
u = -k(x,s)\nabla(p-r_0x_3), \quad x\in\Omega(t), t\in J, & (2.1b)\\
\phi\dfrac{\partial s}{\partial t}+b(s)u\cdot\nabla s-\nabla\cdot(d(s)\nabla s)=f(x,t,s), \quad x\in\Omega(t), t\in J, & (2.1c)\\
p(x,t)=g_1(x,t), \quad x\in\partial\Omega(t), t\in J, & (2.1d)\\
s(x,t)=g_2(x,t), \quad x\in\partial\Omega(t), t\in J, & (2.1e)\\
s(x,0)=s_0(x), \quad x\in\Omega(0). & (2.1f)
\end{cases}
$$

这里p是地层压力，u是流体的达西速度.k(x，s)=k(x)λ(s)，k(x)是地层的渗透率，$\lambda(s)=\dfrac{k_{r_o}(s)}{\mu_o}+\dfrac{k_{r_w}(s)}{\mu_w}$为两相流体的总体迁移率，Q(s，x，t)是产量项，r_0是油水重力流动系数，φ是地层的孔隙度，s(x，t)是饱和度函数，d(s)是扩散系数.(2.1a)和(2.1b)是压力方程，(2.1c)是饱和度方程.求解区域$\Omega(t)=\{x|\xi_m(t)<x_m<\zeta_m(t)$，m=1，2，3$\}$(0≤t≤T)是$R^3_x$中的有界区域.$\xi_m(t)$和$\zeta_m(t)$(m=1，2，3)是给定的已知函数，连续依赖于t.

对问题(2.1)，我们作如下假定(H)：

(1)对$x\in\Omega(t)$，$t\in J$，$w\in R^1$，成立

$$0<\phi_*\leqslant\phi(x)\leqslant\phi^*, 0<k_*\leqslant k(x,w)\leqslant k^*,$$

$$0<d_*\leqslant d(x,w)\leqslant d^*,$$

$$\left|\frac{\partial b}{\partial w}(w)\right|+\left|\frac{\partial d}{\partial w}(w)\right|+\left|\frac{\partial k}{\partial w}(x,w)\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial w}(x,t,w)\right|+\left|\frac{\partial Q}{\partial w}(w,x,t)\right|\leqslant K_1.$$

(2)$0<l_*\leqslant\zeta_m(t)-\xi_m(t)\leqslant l^*$，

$$\left|\frac{d}{dt}\xi_m(t)\right|+\left|\frac{d}{dt}(\zeta_m(t)-\xi_m(t))\right|\leqslant K_2, m=1,2,3, t\in J.$$

这里K_1和K_2为正常数.

§3　中心差分格式-迎风差分格式

给出时间剖分：$0=t^0<t^1<\cdots<t^N=T$，$t^n=n\Delta t$，$\Delta t=T/N$.记$\xi^n_m=\xi_m(t^n)$，$\zeta^n_m=\zeta_m(t^n)$，$\Omega^n=\Omega(t^n)$.在Ω^n上给出对空间的等距剖分：$\xi^n_m=x^n_{m,0}<x^n_{m,1}<\cdots<x^n_{m,N_m+1}=\zeta^n_m$，m=1，2，3.记$h^n_m=\dfrac{\zeta^n_m-\xi^n_m}{N_m+1}$为$x_m$方向的剖分步长，m=1，2，3，$h=\max\limits_{1\leq m\leq 3}\max\limits_{0\leq n\leq N}h^n_m$，$x^n_{1,i-\frac12}=\dfrac12(x^n_{1,i}+x^n_{1,i-1})$，$x^n_{2,j-\frac12}=\dfrac12(x^n_{2,j}+x^n_{2,j-1})$，$x^n_{3,k-\frac12}=\dfrac12(x^n_{3,k}+x^n_{3,k-1})$.令$x^n_{ijk}=(x^n_{1,i}, x^n_{2,j}, x^n_{3,k})$，S，P，U分别是(2.1)中s，p，u的近似.记号$v^n_{ijk}=v(x^n_{ijk}, t^n)$，

$\bar{k}^n_{1,ijk}(S^n)=\dfrac12[k(x^n_{ijk},S^n_{ijk})+k(x^n_{i+1,j,k},S^n_{i+1,j,k})]$，$\check{k}^n_{1,ijk}(S^n)=\dfrac12[k(x^n_{ijk},S^n_{ijk})+k(x^n_{i-1,j,k},S^n_{i-1,j,k})]$.类似可以给出$\bar{k}^n_{m,ijk}(S^n)$，$\check{k}^n_{m,ijk}(S^n)$，m=2，3，$\bar{k}^n_{m,ijk}(S^n)$和$\check{k}^n_{m,ijk}(S^n)$，m=1，2，3的定义.再令$\delta_{x_m}$和$\delta_{\bar{x}_m}$分别表示沿着$x_m$(m=1，2，3)方向的向前和向后差商，引入记号$\delta_{\bar{x}_m}(v_m(S)\delta_{x_m}w)^n_{ijk}=\dfrac{1}{h^n_m}[\bar{v}^n_{m,ijk}(S^n)\delta_{x_m}w^n_{ijk}-\check{v}^n_{m,ijk}(S^n)\delta_{\bar{x}_m}w^n_{ijk}]$.

对压力方程给出中心差分格式

$$-\sum_{m=1}^{3}\delta_{\bar{x}_m}(k_m(S)\delta_{x_m}P)^n_{ijk}=G^n_{ijk}(S^n), \qquad (3.1)$$

这里$G^n_{ijk}(S^n)=Q(S^n_{ijk}, x^n_{ijk}, t^n)-\delta_{\hat{x}_3}(k(x,S)r_0)^n_{ijk}$，$\delta_{\hat{x}_3}$表示$x_3$方向的中心差商.边界条件为：

$$P^n_{ijk}=g^n_{1,ijk}, \quad 当x^n_{ijk}落在\partial\Omega^n上时. \qquad (3.2)$$

近似速度$U=(U_1, U_2, U_3)$由下式给出：

$$U^n_{m,ijk}=-\frac{1}{2}[\bar{k}^n_{m,ijk}(S^n)\delta_{x_m}P^n_{ijk}+\check{k}^n_{m,ijk}(S^n)\delta_{\bar{x}_m}P^n_{ijk}],\quad m=1,2,3. \tag{3.3}$$

下面研究饱和度方程.注意到边界是随时间移动的，为此，令

$$l^n_{1,ijk}=[\xi_1^{n+1}-\xi_1^n+i(h_1^{n+1}-h_1^n)]/\Delta t,\quad l^n_{2,ijk}=[\xi_2^{n+1}-\xi_2^n+j(h_2^{n+1}-h_2^n)]/\Delta t,$$
$$l^n_{3,ijk}=[\xi_3^{n+1}-\xi_3^n+k(h_3^{n+1}-h_3^n)]/\Delta t,$$
$$\alpha^{n+1}_{m,ijk}(s^{n+1},u^{n+1})=b_{m,ijk}(s^{n+1})u^{n+1}_{m,ijk}-\phi_{ijk}l^n_{m,ijk},$$
$$\alpha^{n+1}_{m,ijk}(S^n,U^n)=b_{m,ijk}(S^n)U^n_{m,ijk}-\phi_{ijk}l^n_{m,ijk},$$
$$\check{d}_{1,ijk}(s^{n+1})=d(s^{n+1}_{i-\frac{1}{2},j,k}),\bar{d}_{1,ijk}(s^{n+1})=d(s^{n+1}_{i+\frac{1}{2},j,k}),$$
$$\check{d}_{2,ijk}(s^{n+1})=d(s^{n+1}_{i,j-\frac{1}{2},k}),\bar{d}_{2,ijk}(s^{n+1})=d(s^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2},k}),$$
$$\check{d}_{3,ijk}(s^{n+1})=d(s^{n+1}_{i,j,k-\frac{1}{2}}),\bar{d}_{3,ijk}(s^{n+1})=d(s^{n+1}_{i,j,k+\frac{1}{2}}),$$
$$S^n_{i\pm\frac{1}{2},j,k}=\frac{1}{2}(S^n_{ijk}+S^n_{i\pm1,j,k}),\check{d}_{1,ijk}(S^n)=d(S^n_{i-\frac{1}{2},j,k}),$$
$$\bar{d}_{1,ijk}(S^n)=d(S^n_{i+\frac{1}{2},j,k}).$$

类似地可定义$\check{d}_{m,ijk}(S^n)$和$\bar{d}_{m,ijk}(S^n)$(m=2，3).

用v^+和v^-分别表示函数v(x，t)的正部和负部，即
$v^+=\frac{1}{2}(v(x,t)+|v(x,t)|)\geqslant0$，$v^-=\frac{1}{2}(v(x,t)-|v(x,t)|)\leqslant0$.在内点($x^n_{1,i}$，$x^n_{2,j}$，$x^n_{3,k}$)，$1\leqslant i\leqslant N_1$，$1\leqslant j\leqslant N_2$，$1\leqslant k\leqslant N_3$，我们给出饱和度方程的迎风差分格式：

$$\phi_{ijk}\delta_t S^n_{ijk}+\sum_{m=1}^{3}[\alpha_m^-(S^n,U^n)\delta_{x_m}S+\alpha_m^+(S^n,U^n)\delta_{\bar{x}_m}S-\delta_{\bar{x}_m}(d_m(S^n)\delta_{x_m}S)]^{n+1}_{ijk}=f^{n+1}_{ijk}(S^n), \tag{3.4}$$

其中δ_t是关于时间的向前差商.初始条件和边界条件为：

$$S^0_{ijk}=s_{0,ijk},\qquad x^0_{ijk}\in\Omega^0, \tag{3.5}$$
$$S^n_{ijk}=g^n_{2,ijk},\qquad x^n_{ijk}\in\partial\Omega^n. \tag{3.6}$$

§4 格式的误差估计

令$\pi=p-P$，$e=s-S$，对压力方程成立

$$-\sum_{m=1}^{3}\delta_{\bar{x}_m}(k_m(s)\delta_{x_m}p)^n_{ijk}=G^n_{ijk}(s^n)+\delta^n_{ijk}, \tag{4.1}$$

这里$|\delta^n_{ijk}|\leqslant C\{\|p^n\|_{4,\infty}，\|s^n\|_{3,\infty}\}h^2$.

上式减去(3.1)可得

$$-\sum_{m=1}^{3}\delta_{\bar{x}_m}(k_m(S)\delta_{x_m}\pi)^n_{ijk}=G^n_{ijk}(s^n)-G^n_{ijk}(S^n)+\delta^n_{ijk}+$$
$$\sum_{m=1}^{3}\delta_{\bar{x}_m}((k_m(s)-k_m(S))\delta_{x_m}p)^n_{ijk}. \tag{4.2}$$

引入对应于$L^2(\Omega^n)$和$H^1(\Omega^n)$的离散空间$l^2(\Omega^n)$和$h^1(\Omega^n)$的内积和范数：

$$(v^n,w^n)=\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2}\sum_{k=1}^{N_3}v_{ijk}^n w_{ijk}^n h_1^n h_2^n h_3^n,\quad \|v^n\|=(v^n,v^n)^{1/2},$$

$$[v^n,w^n)_1=\sum_{i=0}^{N_1-1}\sum_{j=1}^{N_2}\sum_{k=1}^{N_3}v_{ijk}^n w_{ijk}^n h_1^n h_2^n h_3^n,\quad [v^n,w^n)_2=\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=0}^{N_2-1}\sum_{k=1}^{N_3}v_{ijk}^n w_{ijk}^n h_1^n h_2^n h_3^n,$$

$$[v^n,w^n)_3=\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2}\sum_{k=0}^{N_3-1}v_{ijk}^n w_{ijk}^n h_1^n h_2^n h_3^n,\quad |[\delta_{x_m}v^n\|=[\delta_{x_m}v^n,\delta_{x_m}v^n)_m^{1/2},m=1,2,3.$$

(4.2)式两边同乘以$\pi^n_{ijk}h^n_1h^n_2h^n_3$并对i，j，k求和，注意到在边界上有$\pi^n_{ijk}=0$，因此

$$\sum_{m=1}^{3}[\bar{k}_m(S^n)\delta_{x_m}\pi^n,\delta_{x_m}\pi^n)_m=(G(s^n)-G(S^n),\pi^n)+(\delta^n,\pi^n)-$$
$$\sum_{m=1}^{3}[(\bar{k}_m(s^n)-\bar{k}_m(S^n))\delta_{x_m}p^n,\delta_{x_m}\pi^n)_m,\tag{4.3}$$

利用分部求和、ε-不等式和离散形式的Fredrichs不等式可以得到[7，8]

$$\sum_{m=1}^{3}|[\delta_{x_m}\pi^n\|^2\leqslant C(\|e^n\|^2+h^4).\tag{4.4}$$

下面考虑饱和度方程.注意到$\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)_{ijk}^{n+1}=\delta_t s_{ijk}^n-\sum_{m=1}^{3}l_{m,ijk}^n\left(\frac{\partial s}{\partial x_m}\right)_{ijk}^{n+1}+O(\Delta t)$，因而

$$\phi_{ijk}\delta_t s_{ijk}^n+\sum_{m=1}^{3}[\alpha_m(s,u)\frac{\partial s}{\partial x_m}-\frac{\partial}{\partial x_m}(d(s)\frac{\partial s}{\partial x_m})]_{ijk}^{n+1}=f_{ijk}^{n+1}(s^{n+1})+O(\Delta t),$$

从而

$$\phi_{ijk}\delta_t s_{ijk}^n+\sum_{m=1}^{3}[\alpha_m^-(s,u)\delta_{x_m}s+\alpha_m^+(s,u)\delta_{\bar{x}_m}s-\delta_{\bar{x}_m}(d_m(s)\delta_{x_m}s)]_{ijk}^{n+1}=$$
$$f_{ijk}^{n+1}(s^{n+1})+\eta_{ijk}^{n+1},\tag{4.5}$$

这里$\eta^{n+1}_{ijk}=0(\Delta t+h)$.

由(4.5)和(3.4)相减，两端再同乘以$e^{n+1}_{ijk}h^{n+1}_1h^{n+1}_2h^{n+1}_3$并对i，j，k求和，得

$$\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2}\sum_{k=1}^{N_3}\phi_{ijk}\delta_t e_{ijk}^n e_{ijk}^{n+1}h_1^{n+1}h_2^{n+1}h_3^{n+1}+\sum_{m=1}^{3}[\bar{d}_m(S^n)\delta_{x_m}e^{n+1},\delta_{x_m}e^{n+1})_m=$$
$$\sum_{m=1}^{3}[(\alpha_m^{n+1}(S^n,U^n))^-\delta_{x_m}S^{n+1}+(\alpha_m^{n+1}(S^n,U^n))^+\delta_{\bar{x}_m}S^{n+1}-$$
$$(\alpha_m^{n+1}(s^{n+1},u^{n+1}))^-\delta_{x_m}s^{n+1}-(\alpha_m^{n+1}(s^{n+1},u^{n+1}))^+\delta_{\bar{x}_m}s^{n+1},e^{n+1})_m+$$

15g31+.gif (1417 bytes)

(4.6)

由假定(H)，利用$x^{n+1}_{1,i}-x^n_{1,i}=0(\Delta t)$，得

$$|(\alpha^{n+1}_{1,ijk}(S^n,U^n))^{\pm}-(\alpha^{n+1}_{1,ijk}(s^{n+1},un+1))^{\pm}|\leqslant$$
$$C(\Delta t+|e^n_{i-1,j,k}|+|e^n_{ijk}|+|e^n_{i+1,j,k}|+|\delta_{\bar{x}_1}\pi^n_{ijk}|+|\delta_{x_1}\pi^n_{ijk}|).$$

类似可估计$|(\alpha^{n+1}_{m,ijk}(S^n,U^n))^{\pm}-(\alpha^{n+1}_{m,ijk}(sn+1,u^{n+1}))^{\pm}|(m=2,3)$.

利用ε-不等式，逐次估计(4.6)各项有

$$\|\phi^{\frac{1}{2}}e^{n+1}\|^2-\|\phi^{\frac{1}{2}}e^n\|^2+d_*\Delta t\sum_{m=1}^{3}|[\delta_{x_m}e^{n+1}\|^2\leqslant$$
$$C\Delta t[\|e^{n+1}\|^2+\|e^n\|^2+\sum_{m=1}^{3}|[\delta_{x_m}\pi^n\|^2+(\Delta t)^2+h^2], \tag{4.7}$$

由(4.4)和(4.7)并利用离散的Gronwall引理，成立

$$\|e^{n+1}\|^2+\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{m=1}^{3}|[\delta_{x_m}e^i\|^2\Delta t\leqslant C[(\Delta t)^2+h^2]. \tag{4.8}$$

这样我们有下述定理.

定理1　设s，p，u是(2.1)的解，P，U是中心差分格式(3.1)～(3.3)的解，对饱和度方程采用隐式迎风差分格式(3.4)～(3.6)，其解记为S，则在假定(H)下，成立误差估计式

$$\|p-P\|_{l^\infty(0,T;h^1(\Omega(t)))}+\|s-S\|_{l^\infty(0,T;l^2(\Omega))}+\|s-S\|_{l^2(0,T;h^1(\Omega(t)))}\leqslant C[\Delta t+h].$$

§5　中心差分格式-修正的迎风差分格式及其估计

对问题(2.1)，我们假定(H′):

1° 对$x\in\Omega(t)$，$t\in J$，$w\in[-\varepsilon,1+\varepsilon]$，成立

$$0<\phi_*\leqslant\phi(x)\leqslant\phi^*,0<k_*\leqslant k(x,w)\leqslant k^*,0<d_*\leqslant d_m(x,w)\leqslant d^*,$$
$$\left|\frac{\partial b}{\partial w}(w)\right|+\left|\frac{\partial d}{\partial w}(w)\right|+\left|\frac{\partial k}{\partial w}(x,w)\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial w}(x,t,w)\right|+\left|\frac{\partial Q}{\partial w}(w,x,t)\right|\leqslant K_1,$$

其中ε是一很小的正数.

2° 假定(H)中的(2)成立.

再引入记号：

$$\beta^{n+1}_{m,ijk}(s^{n+1},u^{n+1})=\alpha^{n+1}_{m,ijk}(s^{n+1},u^{n+1})/d_{ijk}(s^{n+1}),$$
$$\beta^{n+1}_{m,ijk}(S^n,U^n)=\alpha^{n+1}_{m,ijk}(S^n,U^n)/d_{ijk}(S^n),$$
$$\omega^{n+1}_{m,ijk}(s^{n+1},u^{n+1})=(1+\frac{h^{n+1}_m}{2}|\beta^n_{m,ijk}(s^{n+1},u^{n+1})|)^{-1},$$
$$\omega^{n+1}_{m,ijk}(S^n,U^n)=(1+\frac{h^{n+1}_m}{2}|\beta^{n+1}_{m,ijk}(S^n,U^n)|)^{-1},m=1,2,3.$$

我们给出饱和度方程的修正的隐式迎风差分格式：

$$\phi_{ijk}\delta_t S^n_{ijk}+\sum_{m=1}^{3}[\beta^-_m(S^n,U^n)\bar{d}_m(S^n)\delta_{x_m}S+$$

15g36+.gif (1365 bytes)　　(5.1)

初始条件和边界条件仍为(3.5)，(3.6).

对压力方程(4.4)仍然成立.对饱和度方程，注意到[3，4]

$$\phi_{ijk}\delta_t s^n_{ijk}+\sum_{m=1}^{3}[\beta^-_m(s,u)\bar{d}_m(s)\delta_{x_m}s+\beta^+_m(s,u)\dot{d}_m(s)\delta_{\bar{x}_m}s-\omega_m(s,u)\delta_{\bar{x}_m}(d_m(s)\delta_{x_m}s)]^{n+1}_{ijk}=$$
$$f^{n+1}_{ijk}(s^{n+1})+\gamma^{n+1}_{ijk},$$

这里$\gamma^{n+1}_{ijk}=O(\Delta t+h^2)$.上式和(5.1)相减，两边同乘以$e^{n+1}_{ijk}h^{n+1}_1h^{n+1}_2h^{n+1}_3$并对i，j，k求和，得

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2}\sum_{k=1}^{N_3}\phi_{ijk}\delta_t e_{ijk}^{n} e_{ijk}^{n+1} h_1^{n+1}h_2^{n+1}h_3^{n+1} + \sum_{m=1}^{3}[\bar{d}_m(S^n)\delta_{x_m}e^{n+1},\delta_{x_m}(\omega_m(S^n,U^n)e^{n+1}))_m = \\
&\sum_{m=1}^{3}[(\beta_m^{n+1}(S^n,U^n))^{-}\bar{d}_m(S^n)\delta_{x_m}S^{n+1} - (\beta_m^{n+1}(s^{n+1},u^{n+1}))^{-}\bar{d}_m(s^{n+1})\delta_{\bar{x}_m}s^{n+1} + \\
&(\beta_m^{n+1}(S^n,U^n))^{+}\dot{d}_m(S^n)\delta_{\bar{x}_m}S^{n+1} - (\beta_m^{n+1}(s^{n+1},u^{n+1}))^{+}\dot{d}_m(s^{n+1})\delta_{\bar{x}_m}s^{n+1},e^{n+1})_m + \\
&\sum_{m=1}^{3}[(\omega_m^{n+1}(s^{n+1},u^{n+1}) - \omega_m^{n+1}(S^n,U^n))\delta_{\bar{x}_m}(d_m(s^{n+1})\delta_{x_m}s^{n+1}),e^{n+1})_m + \\
&\sum_{m=1}^{3}[(\bar{d}_m(S^n) - \bar{d}_m(s^{n+1}))\delta_{x_m}s^{n+1},\delta_{x_m}(\omega_m^{n+1}(S^n,U^n)e^{n+1})_m + \\
&(f^{n+1}(s^{n+1}) - f^{n+1}(S^n),e^{n+1}) + (\gamma^{n+1},e^{n+1}).
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

作归纳法假定：对0≤l≤n，成立：

$$\|S^l\|_\infty \leq 1+\varepsilon, \tag{5.3}$$

注意到 $\delta_{x_1}(\omega_{1,ijk}^{n+1}(S^n,U^n))=$

$$\frac{1}{2}\omega_{1,i+1,j,k}^{n+1}(S^n,U^n)\omega_{1,ijk}^{n+1}(S^n,U^n)(|\beta_{1,i+1,j,k}^{n+1}(S^n,U^n)|-|\beta_{1,ijk}^{n+1}(S^n,U^n)|),$$

因而$\delta_{x_m}(\omega^{n+1}_{m,ijk}(S^n,U^n))$(m=1，2，3)有界.由假定(H′)和(5.3)，逐项估计(5.2)式可以得到

$$
\begin{aligned}
&\|\phi^{\frac{1}{2}}e^{n+1}\|^2 - \|\phi^{\frac{1}{2}}e^n\|^2 + d.\Delta t\sum_{m=1}^{3}|[\delta_{x_m}e^{n+1}\|^2 \leqslant \\
&C\Delta t[\|e^{n+1}\|^2 + \|e^n\|^2 + \sum_{m=1}^{3}|[\delta_{x_m}\pi^n\|^2 + (\Delta t)^2 + h^4],
\end{aligned}
$$

因此成立

$$\|e^{n+1}\|^2 + \sum_{l=1}^{n+1}\sum_{m=1}^{3}|[\delta_{x_m}e^l\|^2\Delta t \leqslant C[(\Delta t)^2 + h^4], \tag{5.4}$$

下面我们验证归纳法假定(5.3).当l=0时，由(3.5)，$e^0_{ijk}=0$，归纳法假定(5.3)成立.如果归纳法假定(5.3)对l=n成立，则当l=n+1时，利用(5.4)，再假定剖分参数满足

$$\Delta t=o(h^{3/2}), \tag{5.5}$$

则当h充分小时有

$$\|S^{n+1}\|_\infty \leq \|s^{n+1}\|_\infty + \|e^{n+1}\|_\infty \leq 1+Ch^{-3/2}\|e^{n+1}\|_{l^2} \leq 1+\varepsilon,$$

从而归纳法假定(5.3)对0≤l≤N成立.这样我们得到：

定理2　设s，p，u是(2.1)的解，P，U是中心差分格式(3.1)～(3.3)的解，对饱和度方程采用修正的隐式迎风差分格式(5.1)，(3.5)，(3.6)，在假定(H′)和条件(5.5)下，成立误差估计式$\|p-P\|_{l^\infty(0,T;h^1(\Omega(t)))}+\|s-S\|_{l^\infty(0,T;l^2(\Omega(t)))}+\|s-S\|_{l^2(0,T;h^1(\Omega(t)))}\leq C[\Delta t+h^2]$.

§6　数值算例

考虑如下问题：

$$
\begin{cases}
\nabla \cdot u = Q(x,t), \quad x=(x_1,x_2,x_3) \in \Omega(t), t \in J=(0,T], & (6.1a)\\
u = -\nabla p, \quad x \in \Omega(t), t \in J, & (6.1b)\\
\phi \frac{\partial s}{\partial t} + u \cdot \nabla s - \Delta s = f(x,t), \quad x \in \Omega(t), t \in J, & (6.1c)\\
p(x,t)=0, \quad x \in \partial\Omega(t), t \in J, & (6.1d)\\
s(x,t)=0, \quad x \in \partial\Omega(t), t \in J, & (6.1e)\\
s(x,0)=(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_3^2), \quad x \in \Omega(0). & (6.1f)
\end{cases}
$$

这里$\Omega(t)=\{x|-1-a_m t<x_m<1+a_m t, m=1, 2, 3\}$.

记$t1=(1+a_1t)^2-x_1^2$，$t2=(1+a_2t)^2-x_2^2$，$t3=(1+a_3t)^2-x_3^2$，我们取$p(x, t)=t1\cdot t2\cdot t3$，$s(x, t)=t1\cdot t2\cdot t3/(1+a_1t)^2/(1+a_2t)^2/(1+a_3t)^2$，则p(x，t)满足(6.1d)，s(x，t)满足(6.1e)，(6.1f)并以此形成Q(x，t)和f(x，t).

取$a_1=a_2=a_3=0.1$，$\varphi=0.2$，当t=1.0时计算结束.对问题(6.1)分别用中心差分格式-迎风差分格式(简称SchemeI)和中心差分格式-修正的迎风差分格式(简称SchemeⅡ)进行了试算，S，P为数值结果.列出t=1.0时的结果如表1(在表1中，$N_1=N_2=N_3=N$)：

N	Δt	Scheme Ⅰ		Scheme Ⅱ	
		$\Vert p-P\Vert_{h^1(\Omega(t))}$	$\Vert s-S\Vert_{l^2(\Omega(t))}$	$\Vert p-P\Vert_{h^1(\Omega(t))}$	$\Vert s-S\Vert_{l^2(\Omega(t))}$
3	0.05	2.875403	2.928378E-1	2.875403	1.160912E-1
6	0.05	4.410334E-10	2.3323304E-1	4.410334E-10	3.930192E-2
3	0.1	2.961033	3.030613E-1	2.961033	1.222611E-1
6	0.1	3.882426E-10	2.423174E-1	3.882426E-10	4.236473E-2
3	0.2	3.138782	3.245275E-1	3.138782	1.357665E-1
6	0.2	4.268047E-10	2.636001E-1	4.268047E-10	4.917513E-2

从结果来看，与定理1和定理2的结论是一致的.由于本文中的算法对饱和度方程的处理是采用了隐式格式，比在油藏数值模拟中通常用的隐压显饱格式(IMPES格式)稳定性要好得多，更能放大时间步长，节省计算时间.本文的方法可以应用到油藏数值模拟中去，并且计算效率较高.

致谢　感谢袁益让教授和梁栋教授的热情指导.作者对审稿人提出的意见表示衷心的感谢.

资助项目：国家自然科学基金资助项目(19871051).
本文作者通讯地址：济南市山东大学数学与系统科学学院　邮编250100
作者单位：山东大学数学与系统科学学院

参考文献

1　高只明，变边界热传导方程差分格式的收敛性，计算数学，1982，4：139～150.

2　袁益让，油藏数值模拟中动边界问题的特征差分法，中国科学，1994，24：1029～1036.

3　Axelsson，O.，Gustafasson，I.，A modified upwind scheme for convective transport equations and the use of a conjugate gradient method for the solution of non-symmetric systems of equations，J.of the Institute of Mathematics and Its Applications，1979，23:321～337.

4　Ewing，R.E.，Lazarov，R.D.and Vassilev，A.T.，Finite difference scheme for parabolic problems on a composite grids with refinement in time and space，SIAM J.Numer. Anal.，1994，31:1605～1622.

5　梁栋，数值模拟混溶驱动问题的迎风格式及理论分析，高校应用数学学报，1994，9：118～127.

6　袁益让，三维动边值问题的特征混合元方法和理论分析，中国科学，1996，26：11～22.

7　萨马尔斯基A.A.，安德烈耶夫B.Ь.，椭圆型方程差分方法，科学出版社，北京，1984.

8　Douglas J.Jr.，Finite difference methods for two-phase incompressible flow in porous media，SIAM J.Numer. Anal.，1983，20:681～696.

→收稿：1997-06-09，修回：1998-09-17.