

复杂双摆的KAM定理

胡志兴 管克英

摘要 本文建立了复杂双摆的Hamiltonian运动方程, 并将重力作为扰动, 利用KAM理论研究了复杂双摆的运动规律. 研究表明: 复杂双摆运动规律与传统双摆运动规律类似, 当重力能量与总能量相比很小时, KAM不变闭曲线存在表明无重力系统的“总动量”守恒的特点.

关键词 复杂双摆, 无重力系统, 等能量面, KAM定理.

分类号 (中图)0175.21, 0317; (1991MR)34C35, 34C40, 34D10.

KAM THEORY OF THE COMPLEX DOUBLE PENDULUM

Hu Zhixing Guan Keying

College of Science, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083

Abstract This paper deals with the Hamiltonian equations of the complex double pendulum. The KAM theory can be used to study the motions of the complex double pendulum if the gravitation is treated as a perturbation. The studied result shows that the motions of the complex double pendulum are similar to the motions of the traditional double pendulum, and the existence of KAM invariant closed curves expresses that some characters of the “total generalied momentum” conservation of the gravity-free system can be kept when the gravitation energy is small in comparison with the total energy.

Keywords Complex Double Pendulum, Gravity-free System, Energy Level Set, KAM Theory.

Subject Classification (CL)0175.21, 0317; (1991MR)34C35, 34C40, 34D10.

1 引言

人们研究双摆的传统方法都是不考虑连接摆锤的绳或杆的质量, 但在实际双摆运动过程中, 绳或杆的质量总是存在的. 在某些双摆中, 摆锤并不是很规则, 但人们研究这种双摆的运动时, 总是把摆锤的质量集中在摆锤的质心. 从五十年代以来, Moser^[1], Arnold^[2]和Kolmogorov^[3]等数学力学家先后研究了Hamiltonian系统的KAM理论. 当系统的自由度不少于2时, 真正能利用KAM理论来研究力学模型的例子并不多. 文[4]利用KAM理论分别研究了不考虑连接小球的绳或杆的质量和考虑绳或杆的质量的双摆运动. 本文将利用KAM理论研究由不规则摆锤构成复杂双摆的运动. 研究表明: 本文的模型是一个很好的利用KAM理论来研究近可积Hamiltonian系统的实例. 文[4]中的模型将是本文的特殊情形.

2 模型的运动方程

本文考虑的复杂双摆系统 P_g , 如图1所示. 下标 g 表示系统处于重力场, 细杆 \overline{OA} , \overline{AB} 和 \overline{BC} 都是匀质细钢杆, 细杆 \overline{AB} 和 \overline{BC} 之间夹角固定不变, 整个系统 P_g 可绕固定点 O 作平面运动, \overline{ABC} 可绕点 A 作平面运动, 细杆 \overline{OA} 的质量和长度分别为 m_1, l_1 , 细杆 AB 的质量和长度分别为 m_2, l_2 , 细杆 \overline{BC} 的质量和长度分别为 m_3, l_3 , 质点 A, B, C 的质量分别为 m_A, m_B, m_C , $\theta_2 - \theta_3 = \alpha$ (常数), 由于系统 P_g 作平面运动, 它有两个自由度 θ_1, θ_2 . 以下假设 m_A, m_B, l_1, l_2 大于零, m_C, m_1, m_2, m_3, l_3 大于等于零.

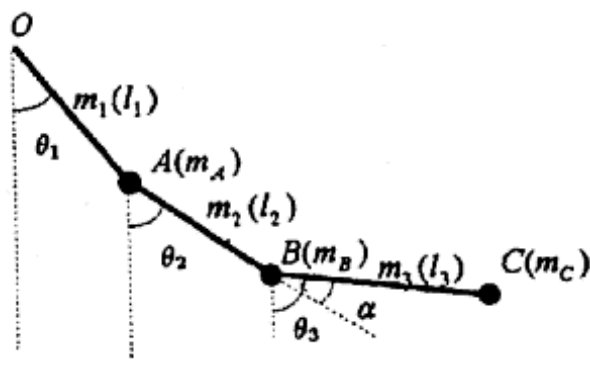


图1 复杂双摆模型

质点A, B, C的动能分别为

$$T_A = \frac{1}{2}m_A l_1^2 \dot{\theta}_1^2, \quad T_B = \frac{1}{2}m_B (l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)),$$

$$T_C = \frac{1}{2}m_C (l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + l_3^2 \dot{\theta}_3^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + 2l_2 l_3 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) + 2l_1 l_3 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_1 - \theta_3)).$$

\overline{OA} 杆的动能 $T_1 = m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 / 6$. \overline{AB} 杆的动能

$$T_2 = m_2 (l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 / 3 + l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)) / 2.$$

\overline{BC} 杆的动能为 $T_3 = m_3 (l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + l_3^2 \dot{\theta}_3^2 / 3 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + l_2 l_3 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) + l_1 l_3 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_1 - \theta_3)) / 2$.

由于 $\theta_2 - \theta_3 = \alpha$ (常数), 则系统 P_g 的总动能为

$$T = \frac{1}{2} (a_{11} (\dot{\theta} + \dot{\phi})^2 + a_{22} \dot{\phi}^2 + 2(a_{12} \cos \theta + a_{21} \cos(\theta + \alpha)) (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \dot{\phi}), \quad (1)$$

其中

$$\begin{cases} a_{11} = (m_A + m_B + m_C + \frac{1}{3}m_1 + m_2 + m_3)l_1^2, \\ a_{22} = (m_B + m_C + \frac{1}{3}m_2 + m_3)l_2^2 + (m_C + \frac{1}{3}m_3)l_3^2 + 2(m_C + \frac{1}{2}m_3)l_2 l_3 \cos \alpha \\ a_{12} = (m_B + m_C + \frac{1}{2}m_2 + m_3)l_1 l_2, \\ a_{21} = (m_C + \frac{1}{2}m_3)l_1 l_3, \\ \theta = \theta_1 - \theta_2, \phi = \theta_2. \end{cases} \quad (2)$$

系统 P_g 的势能为 $V = gH_1(\theta, \phi)$, 其中

$$H_1(\theta, \phi) = - [(m_A + m_B + m_C + \frac{1}{2}m_1 + m_2 + m_3)l_1 \cos(\theta + \phi) + (m_B + m_C + \frac{1}{2}m_2 + m_3)l_2 \cos \phi + (m_C + \frac{1}{2}m_3)l_3 \cos(\phi - \alpha)]. \quad (3)$$

系统 P_g 的Lagrangian函数为 $L_g=T-V$. 设

$$p_\theta = \frac{\partial L_g}{\partial \dot{\theta}}, \quad p_\phi = \frac{\partial L_g}{\partial \dot{\phi}}.$$

系统 P_g 的Hamiltonian函数为

$$H_g = \frac{1}{2\Delta(\theta)} [(a_{11} + a_{22} + 2(a_{12}\cos\theta + a_{21}\cos(\theta + \alpha)))p_\theta^2 + a_{11}p_\phi^2 - 2(a_{11} + a_{12}\cos\theta + a_{21}\cos(\theta + \alpha))p_\theta p_\phi] + V, \quad (4)$$

其中 $\Delta(\theta) = a_{11}a_{22} - (a_{12}\cos\theta + a_{21}\cos(\theta + \alpha))^2$.

由(1)可知: 动能 $T \geq 0$, $T=0$ 当且仅当 $\dot{\theta} = \dot{\phi} = 0$, T 关于 $\dot{\theta}$ 与 $\dot{\theta} + \dot{\phi}$ 是正定二次型, 故 $\Delta(\theta) > 0$.
系统 P_g 的Hamiltonian方程为

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H_g}{\partial p_\theta}, \quad \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H_g}{\partial \theta}, \quad \dot{\phi} = \frac{\partial H_g}{\partial p_\phi}, \quad \dot{p}_\phi = -\frac{\partial H_g}{\partial \phi}. \quad (5)$$

3 无重力系统的运动

首先考虑无重力系统 P_0 的运动, 即 $g=0$, 此时系统 P_0 的Hamiltonian函数为

$$H_0 = \frac{1}{2\Delta(\theta)} [(a_{11} + a_{22} + 2(a_{12}\cos\theta + a_{21}\cos(\theta + \alpha)))p_\theta^2 + a_{11}p_\phi^2 - 2(a_{11} + a_{12}\cos\theta + a_{21}\cos(\theta + \alpha))p_\theta p_\phi]. \quad (6)$$

相应的Hamiltonian方程为

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \frac{1}{\Delta(\theta)} [(a_{11} + a_{22} + 2(a_{12}\cos\theta + a_{21}\cos(\theta + \alpha)))p_\theta - (a_{11} + a_{12}\cos\theta + a_{21}\cos(\theta + \alpha))p_\phi], \\ \dot{p}_\theta = \frac{1}{\Delta^2(\theta)} ((a_{11} + a_{12}\cos\theta + a_{21}\cos(\theta + \alpha))p_\theta - a_{11}p_\phi)((a_{22} + a_{12}\cos\theta + a_{21}\cos(\theta + \alpha))p_\theta - (a_{12}\cos\theta + a_{21}\cos(\theta + \alpha))p_\phi)(a_{12}\sin\theta + a_{21}\sin(\theta + \alpha)), \\ \dot{\phi} = \frac{1}{\Delta(\theta)} (a_{11}p_\phi - (a_{11} + a_{12}\cos\theta + a_{21}\cos(\theta + \alpha))p_\theta), \\ \dot{p}_\phi = 0. \end{cases} \quad (7)$$

方程(7)有两个首次积分, 即(6)和

$$p_\phi = A. \quad (8)$$

对给定 $H_0 = h \in \mathbb{R}^+$, 由(6)可局部得到

$$p_{\theta, \pm} = \Lambda_{\theta, \pm} = \frac{1}{a_{11}} ((a_{11} + a_{12}\cos\theta + a_{21}\cos(\theta + \alpha))p_\theta \pm \sqrt{\Delta(\theta)(2ha_{11} - p_\theta^2)}). \quad (9)$$

将(9)代入(7)，消去dt，得二维自治系统

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{d\phi} = \frac{1}{a_{11}} \left[- (a_{11} + a_{12}\cos\theta + a_{21}\cos(\theta + \alpha)) \pm p_\theta \sqrt{\frac{\Delta(\theta)}{2ha_{11} - p_\theta^2}} \right], \\ \frac{dp_\theta}{d\phi} = \frac{1}{a_{11}} \left[- p_\theta \pm (a_{12}\cos\theta + a_{21}\cos(\theta + \alpha)) \sqrt{\frac{2ha_{11} - p_\theta^2}{\Delta(\theta)}} \right] (a_{12}\sin\theta + a_{21}\sin(\theta + \alpha)). \end{cases} \quad (10)$$

系统(10)是Hamiltonian系统，事实上

$$\frac{d\theta}{d\phi} = - \frac{\partial \Lambda_{0,\pm}}{\partial p_\theta}, \quad \frac{dp_\theta}{d\phi} = \frac{\partial \Lambda_{0,\pm}}{\partial \theta}.$$

设

$$\theta^* = \begin{cases} - \arctan \frac{a_{21}\sin\alpha}{a_{12} + a_{21}\cos\alpha}, & a_{12} + a_{21}\cos\alpha \neq 0, \\ - \frac{\pi}{2}, & a_{12} + a_{21}\cos\alpha = 0. \end{cases}$$

系统(10)共有四个平衡点，它们分别为(记 $D=a_{12}\cos\theta^*+a_{21}\cos(\theta^*+\alpha)$)

$$\begin{cases} \Omega_1: \theta = \theta^*, & p_\theta = p_\theta^* = |a_{11} + D| [2h/(a_{11} + a_{22} + 2D)]^{1/2} \\ \Omega_2: \theta = \theta^*, & p_\theta = p_\theta^* = - |a_{11} + D| [2h/(a_{11} + a_{22} + 2D)]^{1/2} \\ \Omega_3: \theta = \pi + \theta^*, & p_\theta = p_\theta^* = |a_{11} - D| [2h/(a_{11} + a_{22} - 2D)]^{1/2}, \\ \Omega_4: \theta = \pi + \theta^*, & p_\theta = p_\theta^* = - |a_{11} - D| [2h/(a_{11} + a_{22} - 2D)]^{1/2}. \end{cases}$$

对平衡点 Ω_i ($i=1, 2, 3, 4$), 当 $D \neq 0$ 时, 其中两个是中心, 另外两个是鞍点. 不失一般性, 本文以下设 $D > 0$, 系统(10)在平衡点 Ω_i ($i=1, 2, 3, 4$)处的线性近似方程的特征方程为

$$\lambda^2 - b_{12} \cdot b_{21} = 0,$$

其中

$$\begin{cases} b_{12} = \pm 2h \frac{1}{2ha_{11} - p_\theta^2} \sqrt{\frac{\Delta(\theta)}{2ha_{11} - p_\theta^2}} \Big|_{a_i}; \\ b_{21} = \mp (a_{12}\cos\theta + a_{21}\cos(\theta + \alpha)) \sqrt{\frac{2ha_{11} - p_\theta^2}{\Delta(\theta)}} \Big|_{a_i}. \end{cases}$$

对奇点 Ω_1, Ω_2 有 $b_{21} \cdot b_{12} < 0$, 特征方程 $\lambda^2 - b_{12} \cdot b_{21} = 0$ 有一对非零纯虚根, 故 Ω_1, Ω_2 为系统(10)的线性近似方程的中心, 进一步可以证明: Ω_1, Ω_2 是系统(10)的中心, 事实上, 对(10)作平移变换:

$$x = \theta - \theta^*, y = p_\theta - p_\theta^*.$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\phi} = \frac{1}{a_{11}} \left[-a_{11} - D \cos x \pm (y + p_\theta^*) \sqrt{\frac{a_{11}a_{22} - D^2 \cos^2 x}{2ha_{11} - (y + p_\theta^*)^2}} \right] \equiv X(x, y), \\ \frac{dy}{d\phi} = \frac{\sin x}{a_{11}} D \left[-(y + p_\theta^*) \pm D \cos x \cdot \sqrt{\frac{2ha_{11} - (y + p_\theta^*)^2}{a_{11}a_{22} - D^2 \cos^2 x}} \right] \equiv Y(x, y). \end{cases} \quad (11)$$

因 $X(-x, y) = X(x, y)$, $Y(-x, y) = -Y(x, y)$, $(0, 0)$ 是系统(11)的线性近似方程的中心, 由对称原理可得: 平衡点 $(0, 0)$ 是(11)的中心, 故 Ω_1, Ω_2 是(10)的中心.

对奇点 Ω_3, Ω_4 , 因 $b_{12} * b_{21} > 0$, 故 Ω_3, Ω_4 是(10)的鞍点.

系统(10)的四个平衡点对应A的四个特殊值:

$$\begin{cases} A_1 = \sqrt{2H_0(a_{11} + a_{22} + 2D)}, \\ A_2 = -\sqrt{2H_0(a_{11} + a_{22} + 2D)}, \\ A_3 = \sqrt{2H_0(a_{11} + a_{22} - 2D)}, \\ A_4 = -\sqrt{2H_0(a_{11} + a_{22} - 2D)}. \end{cases}$$

可以证明: $a_{11} + a_{12} \pm 2D > 0$.

当参数 $m_A, m_B, m_C, m_1, m_2, m_3, l_1, l_2, l_3, \alpha$ 给定时, (6), (8)定义了两个二维流形, 把(6)定义的二维流形记作 M_0 , 称为等能量面, M_0 同胚于二维环面 T^2 . 当 H_0, A 给定时, 一个具体的运动对应于(6), (8)的交线, 称KAM-曲线. 它通常是一条或两条闭曲线. 我们可以把上述流形嵌入到 R^3 :

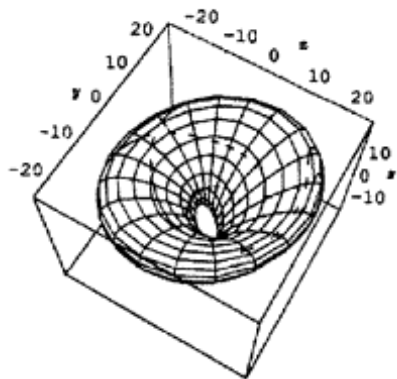
$$\begin{cases} x = (2H_0 + \sqrt{2H_0 a_{11}} + p_\theta) \cos \theta, \\ y = (2H_0 + \sqrt{2H_0 a_{11}} + p_\theta) \sin \theta, \\ z = p_\theta. \end{cases}$$

例如对 $m_A = m_B = m_C = 10, m_1 = m_2 = m_3 = 6, l_1 = l_2 = l_3 = 1, \alpha = \pi/3$, 其等能量面 M_0 和一些KAM-曲线如图2所示.

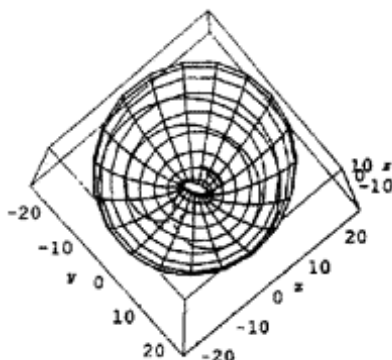
(8)代入(6)得到关于 p_θ 的一元二次方程

$$\begin{aligned} (a_{11} + a_{22} + 2(a_{12} \cos \theta + a_{21} \cos(\theta + \alpha))) p_\theta^2 - 2(a_{11} + a_{12} \cos \theta + a_{21} \cos(\theta + \alpha)) A p_\theta + \\ a_{11} A^2 - 2H_0 \Delta(\theta) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

(12)的判别式为 $\delta(\theta) = 4\Delta(\theta) [2H_0(a_{11} + a_{22} + 2(a_{12} \cos \theta + a_{21} \cos(\theta + \alpha))) - A^2]$.



a) M_0 上半部的一些KAM-曲线



b) M_0 下半部的一些KAM-曲线

图2

若去掉二维流形 M_0 上的四个点 Ω_i ($i=1, 2, 3, 4$), 得非紧的等能量面 M'_0 , 我们得到以下结论 ($D>0$):

1) 当 $A \in (A_4, A_3)$ 时, $\delta(\theta) \geq 4\Delta(\theta) (A^2_3 - A^2) > 0$ ($\theta \in [0, 2\pi]$), (12) 有两组不同的解

$$p_\theta = \frac{2(a_{11} + a_{12}\cos\theta + a_{21}\cos(\theta + \alpha))A \pm \sqrt{\delta(\theta)}}{2(a_{11} + a_{22} + 2(a_{12}\cos\theta + a_{21}\cos(\theta + \alpha)))}. \quad (13)$$

它们定义在区间 $[0, 2\pi]$ 上(只需在一个周期内考虑即可). 由此可知: 在 M_0 上, (13)表示定义在区间 $[0, 2\pi]$ 上的两条互不相交的闭曲线. 因此在 M_0 上, KAM-曲线是一对闭曲线, 通过 M'_0 上的拓扑, 它们同伦于 M'_0 的赤道, 一条几乎全部位于 M'_0 的外半部, 另一条几乎全部位于 M'_0 的内半部. 其力学意义为: 整个系统绕点 O 转动, 同时 \overline{ABC} 绕点 A 转动.

2) 当 $A=A_3$ (或 $A=A_4$)时, $\delta(\theta) \geq 0$ ($\theta \in [0, 2\pi]$), $\delta(\theta)=0$ 当且仅当 $\theta=\pi+\theta^*$. 由此可知: 在 M_0 上, (13)表示定义在区间 $[0, 2\pi]$ 上的两条相交闭曲线. 因此在 M_0 上, KAM-曲线是一对闭曲线, 它们相交于点 Ω_3 (或 Ω_4). 其力学意义为: 整个系统绕点 O 转动, 同时 \overline{AB} 沿某一方向向 \overline{OA} 靠拢, 当 t 趋于正无穷时, \overline{AB} 与 \overline{OA} 保持一个固定角 $\pi+\theta^*$ (或 $\pi-\theta^*$).

3) 当 $A \in (A_3, A_1)$ (或 $A \in (A_2, A_4)$)时, $\delta(\theta) \geq 0$ 当且仅当 $\theta \in [\theta^*-\theta^{**}, \theta^*+\theta^{**}]$, 其中

$$\theta^{**} = \arccos \frac{A^2/(2H_0) - a_{11} - a_{22}}{2\sqrt{a_{12}^2 + a_{21}^2 + 2a_{12}a_{21}\cos\alpha}}$$

且 $\delta(\theta^*+\theta^{**})=\delta(\theta^*-\theta^{**})=0$. 由此可知: 在 M_0 上, (13)表示定义在区间 $[\theta^*-\theta^{**}, \theta^*+\theta^{**}]$ 上的两段曲线, 它们的两端点重合. 因此在 M_0 上, KAM-曲线是一条闭曲线, 通过 M'_0 的拓扑, 它同伦于点 Ω_1 (或 Ω_2). 其力学意义为: 整个系统绕点0转动, 同时 \overline{ABC} 在点A附近振荡.

4) 当 $A=A_1$ (或 $A=A_2$)时, $\delta(\theta) \geq 0$ 当且仅当 $\theta=\theta^*$, 此时 $\delta(\theta^*)=0$. 由此可知: 在 M_0 上, (13)表示定义在 $\theta=\theta^*$ 的一个点. 因此在 M_0 上, KAM-曲线收缩到点 Ω_1 (或 Ω_2). 其力学意义为: 整个系统绕点0转动, 同时 \overline{AB} 与 \overline{OA} 保持一个固定角 θ^* (或 $-\theta^*$).

5) 当 $A^2 > A_1^2$ 时, 对任意 $\theta \in [0, 2\pi]$, 有 $\delta(\theta) < 0$, 方程(12)无实解, 因此流形(6), (8)不相交.

从全局来看, 等能量面 M_0 上的KAM-曲线正好代表(10)的积分曲线, 积分曲线被 Ω_3 和 Ω_4 的分界线分成四部分. 其中两部分中的闭曲线分别同伦于中心 Ω_1 和 Ω_2 , 在每种运动过程中, 不等式 $-\pi < \theta < \pi$ 总成立. 另外两部分中的闭曲线分别同伦于 M'_0 的外赤道和内赤道, 在每种运动过程中, 角 θ 沿相同方向从0到 2π 重复变化. 所有闭曲线关于 φ 都是周期解, 当闭曲线趋于 Ω_3 或 Ω_4 的分界线时, 解的周期将趋于 $+\infty$.

4 系统 P_g 的KAM定理

系统 P_g 的Hamiltonian函数可写成

$$H_g(\theta, p_\theta, \phi, p_\phi) = H_0(\theta, p_\theta, \phi, p_\phi) + gH_1(\theta, \phi). \quad (14)$$

由(3)式可知: $H_1(\theta, \phi)$ 关于 θ, ϕ 是以 2π 为周期的函数.

对任意 $H_g = h_g \in \mathbb{R}^+$, (14)式可写成

$$1 = \frac{1}{h_g} H_0(\theta, p_\theta, \phi, p_\phi) + \varepsilon H_1(\theta, \phi), \quad (15)$$

其中 $\varepsilon = g/h_g$.

考虑Hamiltonian函数 $H_\varepsilon(\theta, \hat{p}_\theta, \phi, \hat{p}_\phi) = H_0(\theta, \hat{p}_\theta, \phi, \hat{p}_\phi) + \varepsilon H_1(\theta, \phi)$, 其中 $H_0(\theta, \hat{p}_\theta, \phi, \hat{p}_\phi)$ 可由 $H_0(\theta, p_\theta, \phi, p_\phi)$ 分别以 $\hat{p}_\theta, \hat{p}_\phi$ 代替 p_θ, p_ϕ 得到, 而

$$\hat{p}_\theta = p_\theta / \sqrt{h_g}, \hat{p}_\phi = p_\phi / \sqrt{h_g}.$$

方程(15)等价于 $H_\varepsilon(\theta, \hat{p}_\theta, \phi, \hat{p}_\phi) = 1$. 若

$$H_\varepsilon(\theta, \hat{p}_\theta, \phi, \hat{p}_\phi) = h, \quad (16)$$

对固定的 $h > 0$ 和 θ , (16)定义了一个等能量面 $M_\varepsilon(\theta)$, 对充分小的 ε , 它同胚于二维环面 T^2 . 当 $\frac{\partial H_\varepsilon}{\partial p_\phi} \neq 0$ 时, 由(16)可局部解得

$$\hat{p}_\phi = \hat{\Lambda}(\theta, \hat{p}_\theta, \phi, h, \varepsilon). \quad (17)$$

把(17)以及 $H_\varepsilon(\theta, \hat{p}_\theta, \phi, \hat{p}_\phi)$ 代入Hamiltonian方程, 并由(16)可得Hamiltonian系统

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{d\phi} = \frac{\partial H_\varepsilon}{\partial p_\theta} / \frac{\partial H_\varepsilon}{\partial p_\phi} = -\frac{\partial \hat{\Lambda}}{\partial p_\theta}, \\ \frac{d\hat{p}_\theta}{d\phi} = -\frac{\partial H_\varepsilon}{\partial \theta} / \frac{\partial H_\varepsilon}{\partial p_\phi} = \frac{\partial \hat{\Lambda}}{\partial \theta}. \end{cases} \quad (18)$$

将系统(18)的Hamiltonian函数 $\Lambda_i(\theta, \hat{p}_\theta, \phi, h, \varepsilon)$ 写成

$$\hat{\Lambda}(\theta, \hat{p}_\theta, \phi, h, \varepsilon) = \Lambda_{0,\pm}(\theta, \hat{p}_\theta, h) + \varepsilon \Lambda_i(\theta, \hat{p}_\theta, \phi, h, \varepsilon),$$

其中 $\Lambda_i(\theta, \hat{p}_\theta, \phi, h, \varepsilon)$ 关于 ϕ 是以 2π 为周期的函数. 当 $\varepsilon=0$ 时, 未扰系统是自治的, 它与(10)相同(若 $\hat{p}_\theta = p_\theta$).

由上节结论以及KAM定理^[5~8]有:

定理 对扰动系统(18), 当 ε 充分小时, 从 $\phi=0$ 到 $\phi=2\pi$ 的Poincaré映射有一族具有正Lebesgue测度 μ 的不变闭曲线, 这些不变闭曲线周围充满稠密的无理轨道.

当 ε 充分小时, 对应未扰系统(10)的四个平衡点 Ω_i ($i=1, 2, 3, 4$), 扰动系统(18)的Poincaré映射也有四个固定点 $\Omega_{i,\varepsilon}$ ($i=1, 2, 3, 4$), 它们对应于(18)的四个周期解(关于 ϕ). Poincaré映射的不变闭曲线可以表示在同胚于二维环面 T^2 的等能量面 M_ε 上. 设 $M_{\varepsilon,0}$ 表示非紧的等能量面, 则 M_ε 在 $\phi_{i,\varepsilon}$ ($i=1, 2, 3, 4$) 处有象洞一样的四个点. 通过 $M_{\varepsilon,0}$ 的拓扑, 这些闭曲线分成四部分: 其中两部分分别是由同伦于 $\Omega_{1,\varepsilon}$ 和 $\Omega_{2,\varepsilon}$ 的闭曲线组成; 而另外两部分分别是由同伦于 $M_{\varepsilon,0}$ 的外赤道和内赤道的闭曲线组成. 在这四部分闭曲线之间, 可能有更复杂的轨道, 将另文研究.

以上不变闭曲线的存在性表明: 虽然在扰动系统中没有象未扰系统中“总动量”那样的守恒量, 但当重力加速度充分小或总能量充分大时, 未扰系统的“总动量”守恒的性质将能够保持, 也就是说: 扰动系统 P_g 的大部分运动状态与未扰系统 P_0 的运动状态相似, 它们仅仅发生了微小的变化, 没有本质的变化; 当然扰动系统 P_g 的少部分运动状态与未扰系统 P_0 的运动状态可能发生质的变化.

国家自然科学基金(19671009A)和博士点基金资助.

作者单位: 北京航空航天大学理学院

本文作者通讯地址: 北京航空航天大学理学院 邮编100083

参考文献

- 1 Moser, J., On invariant curves of area preserving mapping of an annulus, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math. — Phys., K1, 1962, 2: 1~20.
- 2 Arnold, V.I., Proof of A.N. Kolmogorov's theorem on the preservation of quasi-periodic motions under small perturbations of Hamiltonian, Russian Math. Surveys, 1963, 18: 9~36.
- 3 Kolmogorov, A.N., On conservation of conditionally periodic motions for a small change in Hamiltonian's function, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1954, 98: 525~530.
- 4 Guan Keying, The KAM theory of double pendulum, Ann. of Differential Equations, 1998, 14(2): 120~130.
- 5 Arnold, V.I., Mathematical methods of classical mechanics, Springer-Verlag, New York, 1978.
- 6 John Guckenheimer, Philips Holmes, Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcation of vector fields, Springer-Verlag, New York, 1983.
- 7 Arnold, V.I., Dynamical Systems III, Springer-Verlag, Berlin, 1988. 8 Wiggins, S., Global Bifurcations and Chaos, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

收稿: 1997-12-15. 修回: 1998-04-13.