高校应用数学学报
APPLIED MATHEMATICS A
JOURNAL OF CHINESE UNIVERSITIES
1999年 第14卷 第1期 Vol.14 No.1 1999

Burgers-KdV混合型方程的显式精确解

刘春平 张丹

摘要 本文提出了双参数假设，用直接积分的方法求得了Burgers-KdV方程的显式精确解，分析了解的结构.

关键词 Burgers-KdV方程，参数假设，精确解，冲击波，孤立波.
分类号 (中图) O175.2; (1991MR)35Q72.

THE EXPLICIT SOLUTIONS OF BURGERS-KdV MIXED EQUATION

Liu Chunping Zhang Dan
(Yangzhou University, Yangzhou 225002)

Abstract Double parameter hypothesis is given and the explicit exact solutions of Burgers-KdV equation are obtained by direct integration, and then the construction of the solutions are discussed.

Keywords Burgers-KdV Equation, Parameter Hypothesis, Exact Solution, Shock Wave, Solitary Wave.
Subject Classification (CL) O175.2;(1991MR)35Q72.

1 引 言

近几十年来，人们在研究物理学、流体力学中的许多非线性波动问题时，提出了Burgers-KdV混合型方程

$$u_t + uu_x - \alpha u_{xx} + \beta u_{xxx} = 0, \quad \alpha > 0, \beta \neq 0 \quad (1)$$

其中α和β分别表示耗散系数和色散系数[1～4].将方程(1)作为湍流的规范方程以期解释湍流的机理在近年来也取得了很大的进展[5～7].但由于非线性方程求解的固有困难，关于方程(1)行波解的存在性多是利用常微分方程定性理论的方法加以证明的.熊树林通过分析Burgers方程和KdV方程的解之形式，采用类比的办法求得了方程(1)的单调激波解的解析式，并说明解是由冲击波和孤立波组合而成的[8].这一方法不具一般性且关于解的结构的说明有误.本文提出了一种双参数假设，利用直接积分的方法很简单地求得了方程(1)的单调激波解和另一类带间断点的行波解的表达式，然后对解的结构加以说明.

2 双参数假设

设方程(1)有行波解u(x,t)=u(x-ct)=u(ξ),代入方程(1)并对ξ积分一次得到

$$-cu + \frac{1}{2}u^2 - \alpha u'(\xi) + \beta u''(\xi) = K, \quad (2)$$

其中K为积分常数.令u=D+Fv并进一步假设

$$\frac{dv}{d\xi} = Av + Bv^{\frac{3}{2}}, \quad (3)$$

这里D,F,A,B是待定参数.代入方程(2)整理后有

$$(-cD+\frac{1}{2}D^2-K)+(-cF+DF-\alpha AF+\beta A^2F)v+$$

$$(-\alpha BF+\frac{5}{2}\beta ABF)v^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}F(F+3B^2\beta)v^2=0, \tag{4}$$

令

$$\begin{cases}-cD+\frac{1}{2}D^2-K=0,\\ -cF+DF-\alpha AF+\beta A^2F=0,\\ -\alpha BF+\frac{5}{2}\beta ABF=0,\\ F+3B^2\beta=0.\end{cases} \tag{5}$$

解得

$$D=c\pm\sqrt{c^2+2K},\quad \pm\sqrt{c^2+2K}=\frac{6\alpha^2}{25\beta},\quad A=\frac{2\alpha}{5\beta},\quad B^2=-\frac{F}{3\beta}, \tag{6}$$

对应于$\beta>0$，取$F=-1$，此时$u=c+\sqrt{c^2+2K}-v$；对应于$\beta<0$，取$F=1$，此时$u=c-\sqrt{c^2+2K}+v$.

积分(3)式，并注意到(6)式，有

$$v(\xi)=\begin{cases}\frac{12\alpha^2}{25\beta}(1\pm e^z)^{-2}, & \beta>0,\\ -\frac{12\alpha^2}{25\beta}(1\pm e^z)^{-2}, & \beta<0,\end{cases}$$

式中$z=-\frac{\alpha}{5\beta}(\xi+\xi_0)$，$\xi_0$为积分常数.

结论1

$$u_1(x,t)=\sqrt{\left(\frac{6\alpha^2}{25\beta}\right)^2-2K}+\frac{6\alpha^2}{25\beta}-\frac{12\alpha^2}{25\beta}(1+e^z)^{-2} \tag{7}$$

为方程(1)的有界行波解(单调激波)，波速$c=\sqrt{\left(\frac{6\alpha^2}{25\beta}\right)^2-2K}$.

结论2

$$u_2(x,t)=\sqrt{\left(\frac{6\alpha^2}{25\beta}\right)^2-2K}+\frac{6\alpha^2}{25\beta}-\frac{12\alpha^2}{25\beta}(1-e^z)^{-2} \tag{8}$$

也为方程(1)的行波解，波速c同上式.

(8)式所示$u_2(x,t)$是方程(1)带有间断点的行波解.关于它们的物理意义还不很清楚，可能意味着波的坍塌.下面，仅对$u_1(x,t)$且$\beta>0$进行分析.$\beta<0$可类似分析.

3　单调激波解的结构

易证，$u'_1(\xi)<0$. 当$\xi\to+\infty$时，$u_2(x,t)=\sqrt{\left(\frac{6\alpha^2}{25\beta}\right)^2-2K}+\frac{6\alpha^2}{25\beta}-\frac{12\alpha^2}{25\beta}(1-e^{\xi})^{-2}$；当$\xi\to-\infty$时，$u_1\to\sqrt{\left(\frac{6\alpha^2}{25\beta}\right)^2-2K}+\frac{6\alpha^2}{25\beta}$, 故$u_1$确为单调激波解. 对Burgers方程

$$u_t+uu_x-\alpha u_{xx}=0 \quad (9)$$

直接积分，知其有一种连续的行波(冲击波)解

$$u_B=2c_B-u_B(+\infty)-\frac{2[c_B-u_B(+\infty)]}{1+e^{-\frac{1}{\alpha}[c_B-u_B(+\infty)](\xi+\xi_0)}}. \quad (10)$$

KdV方程$u_t+uu_x+\beta u_{xxx}=0$有一种孤波解

$$u_K=\frac{48\beta\lambda^2e^{-2\lambda(\xi+\xi_0)}}{[1+e^{-2\lambda(\xi+\xi_0)}]^2},\ c_K=4\beta\lambda^2. \quad (11)$$

将(7)式恒等变形为

$$u_1=\sqrt{\left(\frac{6\alpha^2}{25\beta}\right)^2-2K}-\frac{6\alpha^2}{25\beta}+\frac{24\alpha^2}{25\beta}\frac{1}{1+e^{\frac{\alpha}{5\beta}(\xi+\xi_0)}}-\frac{12\alpha^2}{25\beta}\frac{1}{[1+e^{\frac{\alpha}{5\beta}(\xi+\xi_0)}]^2}. \quad (12)$$

比较(10)，(11)，(12)式中e的幂次，令

$$-\frac{1}{\alpha}[c_B-u_B(+\infty)]=\frac{\alpha}{5\beta},\quad -2\lambda=\frac{\alpha}{5\beta}.$$

有$\lambda=-\frac{\alpha}{10\beta}$. 代入$c_K=4\beta\lambda^2$，得$c_K=\frac{\alpha^2}{25\beta}$. 从而

$$u_B(+\infty)=c_B+\frac{\alpha^2}{5\beta}=c_K+\frac{\alpha^2}{5\beta}=\frac{6\alpha^2}{25\beta}.$$

这时

$$u_B=-\frac{4\alpha^2}{25\beta}+\frac{2\alpha^2}{5\beta}\frac{1}{1+e^{\frac{\alpha}{5\beta}(\xi+\xi_0)}}, \quad (10)'$$

$$u_K=\frac{12\alpha^2}{25\beta}\cdot\frac{e^{\frac{\alpha}{5\beta}(\xi+\xi_0)}}{[1+e^{\frac{\alpha}{5\beta}(\xi+\xi_0)}]^2}, \quad (11)'$$

从而

$$u_1=\left(\frac{\alpha^2}{25\beta}-\frac{6\alpha^2}{25\beta}\right)+\frac{6}{5}\left[\frac{2\alpha^2}{5\beta}\frac{1}{1+e^{\frac{\alpha}{5\beta}(\xi+\xi_0)}}-\frac{4\alpha^2}{25\beta}\right]+$$
$$\frac{24\alpha^2}{125\beta}+\frac{12\alpha^2}{25\beta}\frac{e^{\frac{\alpha}{5\beta}(\xi+\xi_0)}}{\left[1+e^{\frac{\alpha}{5\beta}(\xi+\xi_0)}\right]^2}=$$
$$\frac{6}{5}u_B+u_K-\frac{\alpha^2}{125\beta}.$$

结论3

当$K=\frac{7\alpha^4}{250\beta^2}$时，方程(1)的波速为$\frac{\alpha^2}{25\beta}$的单调激波解$u_1(x,t)=\frac{6}{5}u_B+u_K-\frac{\alpha^2}{125\beta}$，这里$u_B$是Burgers方程在波速$_u$ $c_B=\frac{\alpha^2}{25\beta},u_B(+\infty)=\frac{6\alpha^2}{25\beta}$，时的冲击波解，uK是KdV方程在波速$c_K=\frac{\alpha^2}{25\beta}$时的孤立波解.

致谢　作者对审稿人的审稿意见表示感谢.

(本文第一作者通讯地址：扬州大学理学院数学系　邮编　225002)

扬州大学自然科学基金资助项目

作者单位：刘春平　张丹　(扬州大学)

参考文献

1 Johnson, R.S., Nonlinear waves in fluid-filled elastic tubes and related problems: [Doctoral Thesis], London:Univ.of London,1979.
2 Bona, J.L., Pitcherd, W.J. and Scott, L.R., An evaluation of a model equation for water waves, Philos. Trans. Roy. Soc. London, 1981,302:547～550
3 Bona, J.L. and Schonbck, M.E., The travelling wave solution to the KdV-Burgers equation, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 1985,101:207～226.
4 Amick, C.J., Bona, J.L. and Schonbck, M.E., Decay of some nonlinear wave equation, J.Differential Equations, 1989,81:1～49.
5 高歌，湍流的耗散及弥散相互作用理论，中国科学(A辑)，1985，15：457～465.
6 管克英，高歌，Burgers-KdV混合型方程行波解的定性分析，中国科学(A辑)，1987，17：64～73.
7 刘式达，刘式适，湍流的KdV-Burgers方程模型，中国科学(A辑)，1991，21：938～946.
8 熊树林，Burgers-KdV方程的一类解析解，科学通报，1989，34：26～29.

收稿：1997-05-29　修回：1998-03-04