高校应用数学学报
APPLIED MATHEMATICS A
JOURNAL OF CHINESE UNIVERSITIES
1999年 第14卷 第1期 Vol.14 No.1 1999

一类强非线性二阶椭圆问题混合元方法的最大模误差估计

姜子文 陈焕祯

摘要 本文利用正规格林函数及对偶论证技术证明了一类强非线性二阶椭圆问题混合元方法对函数的L^2投影具有几乎超收敛一阶的最大模误差估计，对伴随向量函数具有拟最优最大模误差估计.

关键词 非线性，椭圆问题，混合元，最大模.
分类号 (中图)O175.2； (1991MR)65N15， 65N30.

MAXIMUM NORM ERROR ESTIMATES FOR A MIXED METHOD FOR A STRONGLY NONLINEAR SECOND ORDER ELLIPTIC PROBLEM

Jiang Ziwen Chen Huanzhen
(Dept. of Math.,Shandong Normal University, Shandong 250014)

Abstract Using the regularized Green's functions and a duality argument, it is proved that the mixed finite element method proposed in this paper possesses the superconvergence by almost one order maximum norm estimates for the L^2－projection of the function and quasi－optimal maximum norm estimates for the associated vector function for a strongly nonlinear second order elliptic problem.

Keywords Nonlinear, Elliptic Problem, Mixed Method, Maximum Norm.
Subject Classification (CL)O175.2;(1991MR)65N15,65N30.

1 问题的提出

许多物理问题如渗流问题、极小曲面问题可由下述具有强非线性项的二阶椭圆方程刻划：

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(\nabla p)) = f & \text{in } \Omega, \\ p = -g & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中Ω为R^2中具有C^2—正则性边界$\partial\Omega$的有界凸域，$f\in H^{\frac{1}{2}+\varepsilon_0}(\Omega), g\in H^{2+\varepsilon_0}(\partial\Omega), \varepsilon_0>0$，，$a:\Omega\times R^2\to R^2$是二阶偏导数有界的二次连续可微函数.更进一步，我们还要求a有有界正定的Jacobian矩阵，即对$a(z)=(a_1(z),a_2(z))$，$z=(z_1,z_2)\in R^2$，存在λ_1，λ_2使得

$$O<\lambda_1(z)\leqslant\frac{\partial(a_1,a_2)}{\partial(z_1,z_2)}\leqslant\lambda_2(z).$$

由偏微分方程理论知，在上述题设条件下，方程(1.1)有唯一解 $p\in H^{\frac{5}{2}+\varepsilon_0}(\Omega)$.

对上述方程，在做数值或解析处理前，通常都是利用线性化的手段弱化或去掉非线性性.这样做给理论分析和实际计算带来方便，但线性化的过程损失了大量的原始物理信息，且许多实际问题都要求同时对方程的两个量，即函数p和其伴随向量$-a(\nabla p)$直接给出精确的信息.因而利用混合元方法求解原始的非线性方程(1.1)，则可以既较好地保持原始的物理意义，同时也提供了一个直接逼近p和$-a(\nabla p)$这两个物理量的高精度方法.Milner和Park在［1］中提出了一个混合元求解方程(1.1)格式，并且证明

了当有限元空间指数k≥1时的L^2最优逼近和最大模逼近估计.但对伴随向量函数-a(p)直接给出精确的信息.因而利用混合元方法求解原始的非线性方程(1.1)，则可以既较好地保持原始的物理意义，同时也提供了一个直接逼近p和-a(∇p)的最大模逼近估计($O(h^{r-\frac{1}{2}}|\ln h|^{\frac{1}{2}})$)有量阶损失，损失大约为$\frac{1}{2}$强(丰满估计为$O(h^r)$).［1］中同时证明了对函数p的$L^2$投影有几乎超收敛$\frac{1}{2}$阶的逼近估计以及相应的对p的最大模逼近估计.

本文利用正规格林函数方法及对偶论证技术分析问题(1.1)混合元格式的逼近估计，不仅恢复了对伴随向量函数-a(∇p)最大模的拟最优逼近精度($O(h^r|\ln h|)$)，而且还证明了问题(1.1)的混合元格式对函数p的L^2投影有几乎超收敛一阶的最大模逼近以及相应的对p的最大模逼近.对混合元方法的最大模逼近估计详可参见文献［2～4］.

2　离散格式及正规格林函数

若记u=-a(∇p)，则根据对a的假设，利用隐函数存在定理，∇p可局部地表示为

$$\nabla p=-b(u).$$

进一步，假定这种表示整体存在，而且还有$u\in H^{\frac{2}{3}+\varepsilon_0}(\Omega)^2\cap C^{0,1}(\overline{\Omega})^2$，则方程(1.1)可等价地表示为下列一阶方程组：

$$\begin{cases}b(u)+\nabla p=0 & \text{in } \Omega,\\ \operatorname{div}u=f & \text{in } \Omega,\\ p=-g & \text{on } \partial\Omega.\end{cases}\tag{2.1}$$

记$V=H(\operatorname{div};\Omega)=\{v\in L^2(\Omega)^2\mid \operatorname{div}v\in L^2(\Omega)\}$，$W=L^2(\Omega)$，则方程(1.1)或(2.1)的混合弱形式为：求{u，p}∈V×W使得

$$\begin{cases}(b(u),v)-(\operatorname{div}v,p)=\langle g,v\cdot n\rangle, & \forall v\in V,\\ (\operatorname{div}u,w)=(f,w), & \forall w\in W,\end{cases}\tag{2.2}$$

其中，(·　，·)表示$L^2(\Omega)^2$或$L^2(\Omega)$的内积，〈·　，·〉表示$L^2(\partial\Omega)$的内积，n表示$\partial\Omega$的单位外法向.另外，我们还用$\|\cdot\|_{S,p,T}$表示Sobolev空间$W^{S,p}(T)$中的范数，当T=Ω时，简记为$\|\cdot\|_{S,p}$.当p=2时，记$H^S(\Omega)=W^{S,2}(\Omega)$，$\|\cdot\|_S=\|\cdot\|_{S,2}$，并用C表示绝对常数，不同的地方可取不同值.

记T_h为对Ω的拟正则剖分，剖分参数h∈(0，1)，边界单元允许有一条边为Ω的边界.相应的有限元空间$V_h\times W_h\subset V\times W$可取为Raviart－Thomas［5］空间或Brezzi－Douglas－Marini［6］空间.则(2.2)的混合元离散格式为：求$\{u_h,p_h\}\in V_h\times W_h$使得

$$\begin{cases}(b(u_h),v)-(\operatorname{div}v,p_h)=\langle g,v\cdot n\rangle, & \forall v\in V_h,\\ (\operatorname{div}u_h,w)=(f,w), & \forall w\in W_h.\end{cases}\tag{2.3}$$

本文将有限元空间$V_h\times W_h$取为Raviart－Thomas空间且空间指数k≥1，由［1］知(2.3)局部有唯一解且解为L^∞有界，其界可由$\|u\|_{\frac{3}{2}+\varepsilon_0}$与$\|u\|_{C^{0,1}(\Omega)^2}$控制.

定义混合正规格林函数{G，λ}为下述方程的解：

$$\begin{cases} B(u)G+\nabla\lambda=\delta_h(z_0) & \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div}G=0 & \text{in } \Omega, \\ \lambda=0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.4}$$

其中B(u)为b(u)的Jacobian矩阵$\left(\text{即 } B(u)=\dfrac{\partial b}{\partial u}=\dfrac{\partial(b_1,b_2)}{\partial(u_1,u_2)}\right)$，$\delta_h(z_0)$为形如$(\delta_h,0)$或$(0,\delta_h)$的向量函数，其定义详见［4］.由［1］知B(u)是一个正定矩阵.

对任意的$v\in V_h$，若$\|v\|_{0,\infty}=|v(z_0)|$，$z_0\in D$，其中supp $\delta_h\subset D$，D为某一剖分单元$T\in T_h$的内部子域.则做与［4,(3,4)］类似的推证有

$$\|v\|_{0,\infty}\leqslant 2|(v,\delta_h)|,\quad \forall\, v\in V_h. \tag{2.5}$$

若记$\{G_h,\lambda_h\}$为相应于方程(2.4)在$V_h\times W_h$中的混合元解.则类似于［4,Th.3.4］的论证知

$$\|G_h\|_{0,1}\leqslant C|\ln h|. \tag{2.6}$$

3　$u-u_h$的拟最优最大模逼近

由(2.2)与(2.3)可得混合元离散格式的误差方程为：

$$\begin{cases} (b(u)-b(u_h),v)-(\operatorname{div}v,p-p_h)=0, & \forall\, v\in V_h, \\ (\operatorname{div}(u-u_h),w)=0, & \forall\, w\in W_h. \end{cases} \tag{3.1}$$

利用［1,(2.2)］的推证知：

$$b(u)-b(u_h)=B(u)(u-u_h)-(u-u_h)^T[H_1(u_h),H_2(u_h)](u-u_h), \tag{3.2}$$

其中B(u)是b(u)m acobian矩阵且是正定的，$H=[H_1(u_h),H_2(u_h)]$为b(u)的Hessian矩阵，是有界的连续矩阵函数.由(3.2)知，误差方程(3.1)可表示为：

$$\begin{cases} (B(u)(u-u_h),v)-(\operatorname{div}v,p-p_h)=((u-u_h)^TH(u-u_h),v), & \forall\, v\in V_h, \\ (\operatorname{div}(u-u_h),w)=0, & \forall\, w\in W_h. \end{cases} \tag{3.3}$$

令

$$\xi=u-u_h,\ \sigma=\pi_hu-u_h,\ \varsigma=u-\pi_hu,\ \eta=p-p_h,\ \tau=p_1p-p_h,$$

其中π_h和p_1分别为Raviart-Thomas投影算子和L^2投影算子.则误差方程(3.3)化简为：

$$\begin{cases} (B(u)\sigma,v)-(\operatorname{div}v,\tau)=(\xi^TH\xi,v)-(B(u)\varsigma,v), & \forall\, v\in V_h, \\ (\operatorname{div}\sigma,w)=0, & \forall\, w\in W_h. \end{cases} \tag{3.4}$$

不妨设$\|\sigma\|_{0,\infty}=\|\pi_hu-u_h\|_{0,\infty}=|\sigma(z_0)|,z_0\in D\subset T,T\in T_h,$，则由(2.5)知

$$\|\boldsymbol{\sigma}\|_{0,\infty} \leqslant 2|(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\delta}_h)|. \quad (3.5)$$

而由 {G,λ} ，$\boldsymbol{\delta}_h$和 {G_h,λ_h} 的定义及(3.4)知：

$$(\sigma,\delta_h)=(\sigma,B(u)G+\nabla\lambda)=(B(u)(G-G_h),\sigma)+(B(u)G_h,\sigma)+(\sigma,\nabla\lambda)=$$

$$(\lambda-\lambda_h,\mathrm{div}\sigma)+(B(u)G_h,\sigma)+(\sigma,\nabla\lambda)=(-\lambda_h,\mathrm{div}\sigma)+(B(u)\sigma,G_h)=$$

$$(B(u)\sigma,G_h)=(\tau,\mathrm{div}G_h)+(\xi^T H\xi,G_h)-(B(u)\varsigma,G_h)=$$

$$(\xi^T H\xi,G_h)-(B(u)\varsigma,G_h).$$

上面的推导过程中还用到了div$\boldsymbol{\sigma}$＝0，divG_h＝0.注意到H，B(u)的有界性，由上式以及Hölder不等式则有

$$|(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\delta}_h)| \leqslant C(\|\boldsymbol{\xi}\|_{0,\infty}^2+\|\boldsymbol{\varsigma}\|_{0,\infty})\|\boldsymbol{G}_h\|_{0,1}. \quad (3.6)$$

由［1,Th.4.4］,[1,(2.8)],(2.6)和(3.5)～(3.6)知，若u∈$W^{r,\infty}(\Omega)^2$，1＜r≤k+1,则当h充分小时，

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\sigma}\|_{0,\infty} &\leqslant C\{(h^{r-\frac{1}{2}}|\ln h|^{\frac{1}{2}}\|\boldsymbol{u}\|_{r,\infty})^2+h^r\|\boldsymbol{u}\|_{r,\infty}\}|\ln h| \leqslant \\ &Ch^r|\ln h|(h^{r-1}|\ln h|\|\boldsymbol{u}\|_{r,\infty}+1)\|\boldsymbol{u}\|_{r,\infty} \leqslant \\ &Ch^r|\ln h|\|\boldsymbol{u}\|_{r,\infty}. \qquad (3.7)\end{aligned}$$

根据［1,(2.8)］，(3.7)以及三角不等式，则得到下面定理：

定理3.1　若u∈$W^{r,\infty}(\Omega)^2$，1＜r≤k+1,k≥1.则当h充分小时，

$$\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h\|_{0,\infty} \leqslant Ch^r|\ln h|\|\boldsymbol{u}\|_{r,\infty}.$$

注3.1　定理3.1得到了$\|u-u_h\|_{0,\infty}$的拟最优误差估计，将［1,Th.4.4］的误差估计几乎提高了0.5阶.

4　p_1p-p_h超收敛最大模逼近

由范数定义知

$$\|\tau\|_{0,\theta}=\sup_{\substack{\psi\in L^{\theta'}(\Omega)\\ \psi\neq 0}}\frac{(\tau,\psi)}{\|\psi\|_{0,\theta'}},\text{其中}\frac{1}{\theta}+\frac{1}{\theta'}=1,\theta\geqslant 1.$$

为讨论$\|\tau\|_{0,\theta}$，考虑算子$M=M^*:W^{2,\theta'}(\Omega)\to L^{\theta'}(\Omega)$, $Mw=-\mathrm{div}(B^{-1}(\boldsymbol{u})\nabla w)$. 由二阶椭圆方程理论知，对任意$\psi\in L^{\theta'}(\Omega)$, $M\varphi=\psi$ 有唯一解 $\varphi\in W^{2,\theta'}(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$，且由正则性有

$$\|\varphi\|_{2,\theta'} \leqslant C\|\psi\|_{0,\theta'}. \quad (4.1)$$

引理4.1　令2＜θ＜∞.则当h充分小时有

$$\|\tau\|_{0,\theta}\leqslant C(\|\xi\|_{0,2\theta}^2+h\|\xi\|_{0,\theta}+h^2\|\mathrm{div}\xi\|_{0,\theta}). \tag{4.2}$$

证　根据算子π_h, p_1与M的定义、性质和(3.4)，我们有

$$(\tau,\psi)=(\tau,M\varphi)=(\tau,-\mathrm{div}(B^{-1}(u)\nabla\varphi))=$$

$$(\tau,-\mathrm{div}(B^{-1}(u)\nabla\varphi-\pi_h(B^{-1}(u)\nabla\varphi)))+(\tau,-\mathrm{div}\cdot\pi_h(B^{-1}(u)\nabla\varphi))=$$

$$-(\tau,\mathrm{div}\cdot\pi_h(B^{-1}(u)\nabla\varphi))=$$

$$-(B(u)\xi,\pi_h(B^{-1}(u)\nabla\varphi))+(\xi^T H\xi),\pi_h(B^{-1}(u)\nabla\varphi))=$$

$$(B^{-1}(u)\xi,B^{-1}(u)\nabla\varphi-\pi_h(B^{-1}(u)\nabla\varphi))-(B(u)\xi,B^{-1}(u)\nabla\varphi)+$$

$$(\xi^T H\xi,\pi_h(B^{-1}(u)\nabla\varphi)-B^{-1}(u)\nabla\varphi)+(\xi^T H\xi,B^{-1}(u)\nabla\varphi)=$$

$$I_1+I_2+I_3+I_4.$$

由Hölder不等式和［1,(2.8)］有

$$I_1\leqslant C\|\xi\|_{0,\theta}\|B^{-1}(u)\nabla\varphi-\pi_h(B^{-1}(u)\nabla\varphi)\|_{0,\theta'}\leqslant Ch\|\xi\|_{0,\theta}\|B^{-1}(u)\nabla\varphi\|_{1,\theta'}\leqslant$$

$$Ch\|\xi\|_{0,\theta}\|\varphi\|_{2,\theta'}.$$

由(3.1)，Hölder不等式及［1,(2.9)］有

$$I_2=-(\xi,\nabla\varphi)=(\varphi,\mathrm{div}\xi)=(\mathrm{div}\xi,\varphi-p_1\varphi)+(\mathrm{div}\xi,p_1\varphi)=(\mathrm{div}\xi,\varphi-p_1\varphi)\leqslant$$

$$C\|\mathrm{div}\xi\|_{0,\theta}\|\theta-p_1\varphi\|_{0,\theta'}\leqslant Ch^2\|\mathrm{div}\xi\|_{0,\theta}\|\varphi\|_{2,\theta'}.$$

由Hölder不等式及［1,(2.8)］有

$$I_3\leqslant C\|\xi\|_{0,2\theta}^2\|\pi_h(B^{-1}(u)\nabla\varphi)-B^{-1}(u)\nabla\varphi\|_{0,\theta'}$$

$$\leqslant Ch\|\xi\|_{0,2\theta}^2\|B^{-1}(u)\nabla\varphi\|_{1,\theta'}$$

$$\leqslant Ch\|\xi\|_{0,2\theta}^2\|\varphi\|_{2,\theta'}.$$

由Hölder不等式有$I_4\leqslant C\|\xi\|_{0,2\theta}^2\|B^{-1}(u)\nabla\varphi\|_{0,\theta'}\leqslant C\|\xi\|_{0,2\theta}^2\|\varphi\|_{2,\theta'}$.

利用上述I_1，I_2，I_3，I_4的估计和(4.1)，当h充分小时，

$$(\tau,\psi)\leqslant C\{\|\xi\|_{0,2\theta}^2+h\|\xi\|_{0,2\theta}^2+h\|\xi\|_{0,\theta}+h^2\|\mathrm{div}\xi\|_{0,\theta}\}\|\varphi\|_{2,\theta'}\leqslant$$
$$C\{\|\xi\|_{0,2\theta}^2+h\|\xi\|_{0,\theta}+h^2\|\mathrm{div}\xi\|_{0,\theta}\}\|\psi\|_{0,\theta'}.$$

从而由$\|\tau\|_{0,\theta}$的定义知当h充分小时，$\|\tau\|_{0,\theta}\leqslant C\{\|\xi\|^2_{0,2\theta}+h\|\xi\|_{0,\theta}+h^2\|\mathrm{div}\xi\|_{0,\theta}\}$.

定理4.2　给定ε, $0<\varepsilon\ll 1$，若$u\in W^{r-1+\varepsilon,\infty}(\Omega)^2$, $2\leqslant r\leqslant k+2-\varepsilon$, $k\geqslant 1$. 则对充分小的h有下述几乎超收敛一阶估计：

$$\|p_h-p_1p\|_{0,\infty}\leqslant Ch^r\|u\|_{r-1+\varepsilon,\infty}.\quad(4.3)$$

若还有$p\in W^{r,\infty}(\Omega)$, $2\leqslant r\leqslant k+1$, $k\geqslant 1$. 则对充分小的h有

$$\|p-p_h\|_{0,\infty}\leqslant Ch^r(\|p\|_{r,\infty}+\|u\|_{r-1+\varepsilon,\infty}).\quad(4.4)$$

证　利用有限元空间的逆估计和(4.2)有

$$\|p_h-p_1p\|_{0,\infty}\leqslant Ch^{-\frac{\varepsilon}{2}}\|p_h-p_1p\|_{0,\frac{4}{\varepsilon}}\leqslant Ch^{-\frac{\varepsilon}{2}}(\|\xi\|^2_{0,\frac{8}{\varepsilon}}+h\|\xi\|_{0,\frac{4}{\varepsilon}}+h^2\|\mathrm{div}\xi\|_{0,\frac{4}{\varepsilon}})\leqslant$$
$$Ch^{-\frac{\varepsilon}{2}}(\|\xi\|^2_{0,\infty}+h\|\xi\|_{0,\infty}+h^2\|\mathrm{div}\xi\|_{0,\infty}).\quad(4.5)$$

利用(4.5)，［1,(3.4)］和定理3.1，对$1<\alpha\leqslant k+1$, $0\leqslant\beta\leqslant k+1$,

$$\|p_h-p_1p\|_{0,\infty}\leqslant Ch^{-\frac{\varepsilon}{2}}\{(h^\alpha|\ln h|\|u\|_{\alpha,\infty})^2+h^{1+\alpha}|\ln h|\|u\|_{\alpha,\infty}+h^{2+\beta}\|u\|_{\beta+1,\infty}\}\leqslant$$
$$Ch^{2\alpha-\frac{\varepsilon}{2}}|\ln h|^2\|u\|^2_{\alpha,\infty}+Ch^{1+\alpha-\frac{\varepsilon}{2}}|\ln h|\|u\|_{\alpha,\infty}+Ch^{2+\beta-\frac{\varepsilon}{2}}\|u\|_{\beta+1,\infty}.\quad(4.6)$$

令$\alpha=r-1+\varepsilon$, 则$2-\varepsilon<r\leqslant k+2-\varepsilon$, 且当h充分小时，

$$h^{2\alpha-\frac{\varepsilon}{2}}|\ln h|^2\|u\|_{\alpha,\infty}=h^r(h^{r-2+\frac{3}{2}\varepsilon}|\ln h|\|u\|_{r-1+\varepsilon,\infty})\leqslant h^r,\quad(4.7)$$

$$h^{1+\alpha-\frac{\varepsilon}{2}}|\ln h|=h^r(h^{\frac{\varepsilon}{2}}|\ln h|)\leqslant h^r.\quad(4.8)$$

令$\beta+1=r-1+\varepsilon$, 则$2-\varepsilon\leqslant r\leqslant k+3-\varepsilon$, 且当h充分小时，

$$h^{2+\beta-\varepsilon/2}=h^{r+\varepsilon/2}\leqslant h^r.\quad(4.9)$$

从而当$2\leqslant r\leqslant k+2-\varepsilon$时，对充分小的h, (4.7)～(4.9)同时成立. 根据(4.6)～(4.9)可知(4.3)成立，利用三角不等式、［1,(2.9)］和(4.3)，对充分小的h有(4.4)成立.

注4.1　(4.3)将［1］相应结果的超收敛阶提高了$\frac{1}{2}$. (4.4)将u的正则性要求比［1,Th.4.6］对u的正则性要求降低了$\frac{1}{2}$阶. 定理4.2改进了［1,Th.4.6］的结果.

致谢　本文是在袁益让教授和李潜教授的指导下完成的. 作者在此谨致谢意.

（本文作者通讯地址：济南市山东师范大学数学系　邮编　250014）

作者单位：姜子文　陈焕祯　（山东师范大学数学系）

参考文献

1 Milner,F.A., and Park,E.J., A mixed finite element method for a strongly nonlinear second－order elliptic problem, Math. Comp.,1995,64:973～988.
2 陈焕祯，二阶拟线性椭圆问题混合元方法的最大模估计，高等学校计算数学学报，待发表.
3 Kown，Y.H., Milner,F.A.,L^{∞}－error estimates for mixed methods for semilinear 2nd order elliptic equation, SIAM J.Numer.Anal.,1988,25:46～53.
4 Wang Junping,Asymptotic expansions and L^{∞}－error estimates for mixed finite element methods for second order elliptic problems, Numer.Math.,1989,55:401～430.
5 Raviart,P.A., Thomas,J.M., A mixed finite element method for 2nd order elliptic problems, Mathematical Aspects of the Finite Element Method, Lecture Notes in Math.,Springer－Verlag, Berlin, 1977,606:292～315.
6 Brezzi,F., Douglas,J.Jr, Marini,L.D., Two families of mixed finite elements for second order elliptic problems, Numer. Math.,1985,47:217～235.

收稿：1997-02-26.修回：1998-02-25.