习 题 10.1

1. 讨论下列函数序列在指定区间上的一致收敛性。

(1) $S_n(x) = e^{-nx}$, (i) $x\in(0,1)$， (ii) $x\in(1,+\infty)$；

(2) $S_n(x) = x\,e^{-nx}$, $x\in(0,+\infty)$；

(3) $S_n(x) = \sin\dfrac{x}{n}$, (i) $x\in(-\infty,+\infty)$， (ii) $x\in[-A,A]\,(A>0)$；

(4) $S_n(x) = \arctan nx$, (i) $x\in(0,1)$， (ii) $x\in(1,+\infty)$；

(5) $S_n(x) = \sqrt{x^2+\dfrac{1}{n^2}}$, $x\in(-\infty,+\infty)$；

(6) $S_n(x) = nx(1-x)^n$, $x\in[0,1]$；

(7) $S_n(x) = \dfrac{x}{n}\ln\dfrac{x}{n}$, (i) $x\in(0,1)$， (ii) $x\in(1,+\infty)$)；

(8) $S_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$, (i) $x\in(0,1)$， (ii) $x\in(1,+\infty)$；

(9) $S_n(x) = (\sin x)^n$, $x\in[0,\pi]$；

(10) $S_n(x) = (\sin x)^{\frac{1}{n}}$, (i) $x\in[0,1]$， (ii) $x\in[\delta,\pi-\delta]$ （$\delta>0$）；

(11) $S_n(x) = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$, (i) $x\in(-\infty,+\infty)$， (ii) $x\in[-A,A]\,(A>0)$；

(12) $S_n(x) = n\left(\sqrt{x+\dfrac{1}{n}}-\sqrt{x}\right)$, (i) $x\in(0,+\infty)$, (ii) $x\in[\delta,+\infty)$, $\delta>0$。

2. 设$S_n(x) = n(x^n - x^{2n})$，则函数序列$\{S_n(x)\}$在$[0,1]$上收敛但不一致收敛，且极限运算与积分运算不能交换，即

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 S_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} S_n(x)\,dx。$$

3. 设$S_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$，则

(1) 函数序列$\{S_n(x)\}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛；

(2) $\left\{\dfrac{d}{dx}S_n(x)\right\}$在$(-\infty,+\infty)$上不一致收敛；

(3) 极限运算与求导运算不能交换，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx}S_n(x) = \frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty}S_n(x)$$

并不对一切$x\in(-\infty,+\infty)$成立。

4. 设$S_n(x) = \dfrac{1}{n}\arctan x^n$，则函数序列$\{S_n(x)\}$在$(0,+\infty)$上一致收敛；试问极限运算与求导运算能否交换，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx}S_n(x) = \frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty}S_n(x)$$

是否成立?

5. 设$S_n(x) = n^a x e^{-nx}$，其中a是参数。求a的取值范围，使得函数序列$\{S_n(x)\}$在$[0,1]$上

(1) 一致收敛；

⑵ 积分运算与极限运算可以交换，即

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 S_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} S_n(x)\,\mathrm{d}x\text{；}$$

⑶ 求导运算与极限运算可以交换，即对一切 $x\in[0,1]$成立

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}S_n(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\lim_{n\to\infty}S_n(x)\text{ 。}$$

6. 设 $S'(x)$在区间(a,b)上连续，

$$S_n(x) = n\left[S\left(x+\frac{1}{n}\right)-S(x)\right],$$

证明：$\{S_n(x)\}$在(a,b)内闭一致收敛于$S'(x)$。

7. 设 $S_0(x)$ 在$[0,a]$上连续，令

$$S_n(x) = \int_0^x S_{n-1}(t)\,\mathrm{d}\,t,\qquad n=1,2,\cdots\text{。}$$

证明：$\{S_n(x)\}$在$[0,a]$上一致收敛于 0。

8. 设$S(x)$在$[0,1]$上连续，且$S(1)=0$。证明：$\{x^n S(x)\}$在$[0,1]$上一致收敛。

习　　题　**10.2**

1. 讨论下列函数项级数在所指定区间上的一致收敛性。

⑴ $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$，　　$x\in[0,1]$；

⑵ $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)^2x^n$，　　$x\in[0,1]$；

⑶ $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^3\mathrm{e}^{-nx^2}$，　　$x\in[0,+\infty)$；

⑷ $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x\,\mathrm{e}^{-nx^2}$，　　(i) $x\in[0,+\infty)$，　(ii) $x\in[\delta,+\infty)$（$\delta>0$）；

⑸ $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x}{1+n^3x^2}$，　　$x\in(-\infty,+\infty)$；

⑹ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$，　　$x\in(-\infty,+\infty)$；

⑺ $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$，　　$x\in[0,1]$；

⑻ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+x^2}$，　　$x\in(-\infty,+\infty)$；

⑼ $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n\sin\dfrac{1}{3^n x}$，　　(i) $x\in(0,+\infty)$，(ii) $x\in[\delta,+\infty)$（$\delta>0$）；

⑽ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin x\sin nx}{\sqrt{n}}$，　　$x\in(-\infty,+\infty)$；

⑾ $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$，　　$x\in(-\infty,+\infty)$；

⑿ $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$，　　　　$x\in(-\infty,+\infty)$。

2. 证明：函数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2+1}$ 在$(0,2\pi)$上连续，且有连续的导函数。

3. 证明：函数 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n\,\mathrm{e}^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续，且有各阶连续导数。

4. 证明：函数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$在$(1,+\infty)$ 上连续，且有各阶连续导数；函数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续，且有各阶连续导数。

5. 证明：函数项级数 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{x}{n^2}$ 可以逐项求导，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\arctan\frac{x}{n^2}。$$

6. 设数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，证明：

(1) $\lim_{x\to 0+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$；　　　(2) $\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n\,\mathrm{d}\,x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}$。

7. 设$u_n(x)$，$v_n(x)$在区间(a,b)连续，且｜$u_n(x)$｜$\le v_n(x)$ 对一切$n\in\mathbf{N}^+$成立。证明：若$\sum_{n=1}^{\infty}v_n(x)$在$(a,b)$上点态收敛于一个连续函数，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$也必然收敛于一个连续函数。

8. 设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$x=a$与$x=b$收敛，且对一切$n\in\mathbf{N}^+$，$u_n(x)$在闭区间$[a,b]$上单调增加，证明：$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛。

9. 设对一切$n\in\mathbf{N}^+$，$u_n(x)$在$x=a$右连续，且$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$x=a$发散，证明：对任意$\delta>0$，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$(a,a+\delta)$上必定非一致收敛。

10．证明函数项级数$\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x}{n\ln^2 n}\right)$在$[-a,a]$上是一致收敛的，其中$a$是小于$2\ln^2 2$的任意固定正数。

11．设

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}。$$

（1）　证明：$f(x)$在$[0,\pi/2]$上连续；

（2）　计算$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$。

12．设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{\sqrt{n^3+n}}$。

（1）　证明：$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续；

（2）记 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$，证明：

$$\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{15}<F\left(\frac{\pi}{2}\right)<\frac{\sqrt{2}}{2}。$$

13．设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+x}$。

（1） 证明 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，且一致连续；

（2） 证明反常积分 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 发散。

习　　题　10.3

1. 求下列幂级数的收敛半径与收敛域。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}x^n$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)(x-1)^n$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n\cdot 2^n}$；

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(n+1)}{n+1}(x+1)^n$；

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$；

(6) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{n^n}x^{n^2}$；

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n$；

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$；

(9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^n$。

2. 设 $a>b>0$，求下列幂级数的收敛域。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n}$；

(3) $ax+bx^2+a^2x^3+b^2x^4+\cdots+a^nx^{2n-1}+b^nx^{2n}+\cdots$。

3. 设 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径分别为 R_1 和 R_2，讨论下列幂级数的收敛半径：

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n}$；

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$；

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}a_nb_nx^n$。

4. 应用逐项求导或逐项求积分等性质，求下列幂级数的和函数，并指出它们的定义域。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$；

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2x^n$；

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$；

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$ ；

(6) $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n$ 。

5. 设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$，则不论 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 在 $x=r$ 是否收敛，只要 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ 在 $x=r$ 收敛，就成立

$$\int_0^r f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1},$$

并由此证明：

$$\int_0^1 \ln\frac{1}{1-x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}。$$

6. 证明：

(1) $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$ 满足方程 $y^{(4)}=y$;

(2) $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}$ 满足方程 $xy''+y'-y=0$。

7. 应用幂级数性质求下列级数的和

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{2^n}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+2)}{4^{n+1}}$;

(4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{2^n}$;

(5) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^n(2n+1)}$;

(6) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n(n^2-1)}$;

(7) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{n+1}}{n!}$;

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n!}$.

8．设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，$A_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$，且 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{A_n}=0$，求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径。

9．设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}x^n$ 。

（1） 证明 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 上连续，在 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 上可导；

（2） $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 处的左导数是否存在？

习　　题　10.4

1. 求下列函数在指定点的 Taylor 展开，并确定它们的收敛范围：

(1) $1+2x-3x^2+5x^3$，$x_0=1$;

(2) $\frac{1}{x^2}$，$x_0=-1$;

(3) $\dfrac{x}{2-x-x^2}$， $x_0 = 0$; (4) $\sin x$， $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$;

(5) $\ln x$ ， $x_0 = 2$; (6) $\sqrt[3]{4-x^2}$， $x_0 = 0$;

(7) $\dfrac{x-1}{x+1}$， $x_0 = 1$; (8) $(1+x)\ln(1-x)$， $x_0 = 0$;

(9) $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$， $x_0 = 0$; (10) $\dfrac{e^{-x}}{1-x}$， $x_0 = 0$。

2. 求下列函数在$x_0 = 0$ 的Taylor展开

(1) $\dfrac{x}{\sin x}$ 至 x^4 ； (2) $e^{\sin x}$ 至 x^4 ；

(3) $\ln\cos x$至 x^6； (4) $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ 至x^4。

3. 利用幂级数展开，计算下列积分，要求精确到 0.001。

(1) $\int_0^1 \dfrac{\sin x}{x}\,dx$ ； (2) $\int_0^1 \cos x^2\,dx$ ；

(3) $\int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{\arctan x}{x}\,dx$ ； (4) $\int_2^{+\infty} \dfrac{dx}{1+x^3}$。

4. 应用$\dfrac{e^x-1}{x}$在 $x = 0$ 的幂级数展开，证明：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1。$$

5．求下列函数项级数的和函数

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)^{2n}$ ；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)x^n$ 。

（提示：考虑$\dfrac{1}{1-x}$和$-\ln(1-x)$的幂级数展开的乘积）

6．设$\{a_n\}$是等差数列，$b > 1$，求级数$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{b^n}$的和。

（提示：考虑幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{b^n}x^n$）

7．利用幂级数展开，计算$\int_0^1 \dfrac{\ln x}{1-x^2}dx$ 。

8． (1) 应用$\dfrac{\pi}{4} = \arctan\dfrac{1}{2} + \arctan\dfrac{1}{3}$，计算 π 的值，要求精确到$10^{-4}$ ；

(2) 应用$\dfrac{\pi}{6} = \arcsin\dfrac{1}{2}$，计算 π 的值，要求精确到$10^{-4}$ 。

9．利用幂级数展开，计算$\int_1^3 e^{-\frac{1}{x}}dx$ 的值，要求精确到10^{-4} 。

习　　题　10.5

1. 求$f(x)=x^3$的Bernstein多项式 $B_n(f, x)$。
2. 设 $f(x)=\sqrt{x}$，$x\in[0, 1]$，求它的四次 Bernstein 多项式 $B_4(f, x)$。
3. 设 $f(x)$在$[a, b]$上连续，证明：对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在有理系数多项式 $P(x)$，使得

$$|P(x)-f(x)|<\varepsilon$$

对一切 $x\in[a, b]$成立。

4. 设 $f(x)$在$[a, b]$上连续，且对任一多项式 $g(x)$ 成立

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=0\text{。}$$

证明在$[a, b]$上成立 $f(x)\equiv 0$。

5. 设 $P_0(x)=0$，$P_{n+1}(x)=P_n(x)+\dfrac{x^2-P_n^2(x)}{2}$ $(n=0,1,2,\cdots)$，证明：$\{P_n(x)\}$ 在$[-1,1]$上一致收敛于$|x|$。

（提示：应用 Dini 定理）