第九章习题

习　　题　9.1

1. 讨论下列级数的收敛性。收敛的话，试求出级数之和。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3n+1}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$；　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)$；

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$；　　(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n-1}+4^{n+1}}{3^{2n}}$；

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$；　　(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}$；

(9) $\sum_{n=0}^{\infty}q^n\cos nx \quad (|q|<1)$.

2．确定 x 的范围，使下列级数收敛。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-x)^n}$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{nx}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}x^n(1-x)$.

3．求八进制无限循环小数（$36.0736073607\cdots)_8$ 的值。

4．设 $x_n=\int_0^1 x^2(1-x)^n\,dx$，求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 的和。

5. 设抛物线 l_n ：$y=nx^2+\frac{1}{n}$ 和 l_n' ：$y=(n+1)x^2+\frac{1}{n+1}$ 的交点的横坐标的绝对值为 a_n（$n=1,2,\cdots$）。

(1) 求抛物线 l_n 与 l_n' 所围成的平面图形的面积 S_n ；

(2) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{a_n}$ 的和。

习　　题　9.2

1. 求下列数列的上极限与下极限

(1) $x_n=\frac{n}{2n+1}\cos\frac{2n\pi}{5}$；　　(2) $x_n=n+(-1)^n\frac{n^2+1}{n}$；

(3) $x_n=-n\,[\,(-1)^n+2]$；　　(4) $x_n=\sqrt[n]{n+1}+\sin\frac{n\pi}{3}$；

(5) $x_n=2\,(-1)^{n+1}+3(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$。

2. 证明：

(1) $\overline{\lim_{n\to\infty}}(-x_n) = -\underline{\lim_{n\to\infty}}\ x_n$； (2) $\overline{\lim_{n\to\infty}}(c\,x_n) = \begin{cases} c\,\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n, & c>0, \\ c\,\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n, & c<0. \end{cases}$

3. 证明：

(1) $\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n) \ge \underline{\lim_{n\to\infty}}\ x_n + \underline{\lim_{n\to\infty}}\ y_n$；

(2) 若 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在，则

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \underline{\lim_{n\to\infty}}\ y_n。$$

4. 证明：若 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$，$-\infty < x < 0$，则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n\ y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \underline{\lim_{n\to\infty}}\ y_n；$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n\ y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}}\ y_n。$$

习　题　9.3

1. 讨论下列正项级数的收敛性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n}{n^4+1}$； (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2}{n^3+3n}$；

(3) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n}$； (4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$；

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$； (6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$；

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$； (8) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)$；

(9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$； (10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[2+(-1)^n]^n}{2^{2n+1}}$；

(11) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\,\mathrm{e}^{-n}$； (12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$；

(13) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$； (14) $\sum_{n=1}^{\infty}(2n-\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$；

(15) $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\frac{n^2+1}{n^2-1}$； (16) $\sum_{n=3}^{\infty}\ln\cos\frac{\pi}{n}$；

(17) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$ $(a>0)$。

2. 利用级数收敛的必要条件，证明：

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0$； (2) $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{2^{n(n+1)}}=0$。

3. 利用 Raabe 判别法判断下列级数的收敛性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$ $(a>0)$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{\ln n}}$；　　(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$。

4. 讨论下列级数的收敛性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{\frac{1}{n}}\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\mathrm{d}x$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n\pi}^{2n\pi}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{\frac{1}{n}}\ln(1+x)\,\mathrm{d}x$。

5. 利用不等式 $\frac{1}{n+1}<\int_{n}^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}<\frac{1}{n}$，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$$

存在(此极限为 Euler 常数 γ — 见例 2.4.8)。

6. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ 是两个正项级数，若 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=0$ 或 $+\infty$，请问这两个级数的收敛性关系如何?

7. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2$ 也收敛；反之如何?

8. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛，则当 $p>\frac{1}{2}$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{x_n}}{n^p}$ 收敛；又问当 $0<p\le\frac{1}{2}$ 时，结论是否仍然成立?

9．设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调增加，且 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$。

（1）证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[f(n+1)-f(n)]$ 收敛，并求其和；

（2）进一步设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上二阶可导，且 $f''(x)<0$，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f'(n)$ 收敛。

10．设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx$，$n=1,2,\cdots$。

（1）　求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+a_{n+2}}{n}$ 的和；

（2）　设 $\lambda>0$，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛。

11. 设 $x_n>0$，$\frac{x_{n+1}}{x_n}>1-\frac{1}{n}$ $(n=1,2,\cdots)$，证明 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 发散。

12．设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 发散（$x_n>0$，$n=1,2,\cdots$），证明必存在发散的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$，使得 $\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=0$。

（提示：设 $S_n=\sum_{k=1}^{n}x_k$，令 $y_1=S_1$，$y_n=\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}$ $(n=2,3,4,\cdots)$）

13. 设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$发散，$S_n=\sum_{k=1}^{n} x_k$，证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{S_n^2}$收敛。

(提示：利用不等式$\frac{x_n}{S_n^2}\le\frac{S_n-S_{n-1}}{S_nS_{n-1}}$)

14．设$\{a_n\}$为 Fibonacci 数列。证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}$收敛，并求其和。

（提示：利用 Fibonacci 数列的性质$a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$及$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}<2$）

习　　题　9.4

1. 讨论下列级数的收敛性(包括条件收敛与绝对收敛)

⑴ $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{5}+\cdots$;

⑵ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+x}$ （$x\ne -n$）；

⑶ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{x}{n}$;

⑷ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}$;

⑸ $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln^2 n}{n}$;

⑹ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\frac{n\pi}{3}$;

⑺ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n\sin^{2n}x}{n}$;

⑻ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n+1)x\cos(n-1)x}{n^p}$;

⑼ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{2^n}x^n$;

⑽ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{(3n-2)(3n+2)}}$;

⑾ $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^p\ln^q n}$;

⑿ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{a}{1+a^n}$ （$a>0$）.

2. 利用 Cauchy 收敛原理证明下述级数发散：

⑴ $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\cdots$;

⑵ $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\cdots$。

3. 设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$收敛，{x_n} 单调减少，利用 Cauchy 收敛原理证明：$\lim_{n\to\infty}nx_n=0$。

4. 若对任意$\varepsilon>0$和任意正整数p，存在$N(\varepsilon,p)$，使得

$$|x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_{n+p}|<\varepsilon$$

对一切$n>N$成立，问级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$是否收敛?

5. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=1$，问级数$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 是否收敛?

6. 设$x_n\geq 0$，$\lim_{n\to\infty} x_n=0$，问交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x_n$是否收敛?

7. 设正项数列$\{x_n\}$单调减少，且级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x_n$ 发散。问级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+x_n}\right)^n$ 是否收敛？并说明理由。

8. 设级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n^{\alpha_0}}$收敛，则当$\alpha>\alpha_0$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n^{\alpha}}$ 也收敛。

9. 若 $\{nx_n\}$ 收敛，$\sum_{n=2}^{\infty} n(x_n-x_{n-1})$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛。

10. 若$\sum_{n=2}^{\infty}(x_n-x_{n-1})$绝对收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ 收敛。

11．设 $f(x)$在$[-1,1]$上具有二阶连续导数，且

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0 。$$

证明级数$\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$绝对收敛。

12．已知任意项级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散，证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)x_n$ 也发散。

13. 设$x_n>0$，$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)>0$，证明：交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x_n$收敛。

（提示：证明存在正数α，当n充分大时，数列$\{n^{\alpha}x_n\}$单调减少）

14. 利用

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\to\gamma\quad(n\to\infty),$$

其中γ是 Euler 常数(见例 2.4.8)，求下述$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$的更序级数的和：

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots 。$$

15. 利用级数的 Cauchy 乘积证明：

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=1$；

(2) $\left(\sum_{n=0}^{\infty}q^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}q^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n=\frac{1}{(1-q)^2}$ （$|q|<1$）。

习　题　9.5

1. 讨论下述无穷乘积的收敛性

(1) $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^2+1}$;　　(2) $\prod_{n=2}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}$;

(3) $\prod_{n=3}^{\infty}\cos\frac{\pi}{n}$; (4) $\prod_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{1}{n}$;

(5) $\prod_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{n^x}}$; (6) $\prod_{n=1}^{m}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$;

(7) $\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{x^n}{2^n}\right)$; (8) $\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}$;

(9) $\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}\right]$; (10) $\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^p}\right)\cos\frac{\pi}{n^q}\right]$（$p,q>0$）.

2. 计算下述无穷乘积的值：

(1) $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$; (2) $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)$;

(3) $\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}$。

3. 设 $0<x_n<\frac{\pi}{2}$，$\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2$ 收敛，则 $\prod_{n=1}^{\infty}\cos x_n$ 收敛。

4. 设 $|a_n|<\frac{\pi}{4}$，$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，则 $\prod_{n=1}^{\infty}\tan\left(\frac{\pi}{4}+a_n\right)$ 绝对收敛。

5. 证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}=0$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+n)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}=0$（$0<\beta<\alpha$）。

6. 设 $|q|<1$，证明：

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^n\right)=1/\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{2n-1}\right)。$$

（提示：$\prod_{k=1}^{2n}\left(1+q^k\right)=\prod_{k=1}^{2n}\left(1-q^{2k}\right)\Big/\prod_{k=1}^{2n}\left(1-q^k\right)=\prod_{k=n+1}^{2n}\left(1-q^{2k}\right)\Big/\prod_{k=1}^{n}\left(1-q^{2k-1}\right)$）

7. 设 $a_{2n-1}=-\frac{1}{\sqrt{n}}$，$a_{2n}=\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 都发散，但无穷乘积 $\prod_{n=2}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛。