习　题　3.1

1. 按函数极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{x\to 2} x^3 = 8$；　(2) $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{x} = 2$；

(3) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{1}{2}$；　(4) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x+1}{2x-1} = \dfrac{1}{2}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0+} \ln x = -\infty$；　(6) $\lim\limits_{x\to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$；

(7) $\lim\limits_{x\to 2+} \dfrac{2x}{x^2-4} = +\infty$；　(8) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2}{x+1} = -\infty$。

2. 求下列函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$；　(2) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^5-5x^3+2x}{x^5-x^3+3x}$；　(4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+2x)(1+3x)-1}{x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^n-1}{x}$；　(6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$；

(7) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$；　(8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{1-\cos x}$；

(9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$；　(10) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$。

3. 利用夹逼法求极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\dfrac{1}{x}\right]$；　(2) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$。

4. 利用夹逼法证明：

(1) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^k}{a^x} = 0$　($a>1$，k 为任意正整数)；

(2) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln^k x}{x} = 0$　(k 为任意正整数);

5. 讨论单侧极限：

(1) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x}, & 0<x\le 1, \\ x^2, & 1<x<2, \\ 2x & 2<x<3, \end{cases}$　在 $x = 0,1,2$ 三点；

(2) $f(x) = \dfrac{2^{\frac{1}{x}}+1}{2^{\frac{1}{x}}-1}$，　在 $x=0$ 点；

(3) Dirichlet 函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x\text{为有理数}, \\ 0, & x\text{为无理数}, \end{cases}$$ 在任意点；

(4) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \left[\dfrac{1}{x}\right]$，在 $x = \dfrac{1}{n}$ （$n = 1,2,3,\cdots$）。

6. 说明下列函数极限的情况：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$； (2) $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^{x}\sin x$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}$； (4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$；

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{x}$； (6) $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\dfrac{1}{x}-\left[\dfrac{1}{x}\right]\right)$。

7．设函数

$$f(x)=\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)。$$

问当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 的极限是否存在？

8. 设 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$（$a\geq 0$），证明：$\lim\limits_{x\to\sqrt{a}} f(x^2) = A$ 。

9. (1) 设 $\lim\limits_{x\to 0} f(x^3) = A$，证明：$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = A$ 。

(2) 设 $\lim\limits_{x\to 0} f(x^2) = A$，问是否成立 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = A$？

10. 写出下述命题的“否定命题”的分析表述：

(1) $\{x_n\}$是无穷小量；

(2) $\{x_n\}$是正无穷大量；

(3) $f(x)$ 在 x_0 的右极限是 A；

(4) $f(x)$ 在 x_0 的左极限是正无穷大量；

(5) 当 $x\to-\infty$，$f(x)$ 的极限是 A；

(6) 当 $x\to+\infty$，$f(x)$ 是负无穷大量。

11. 证明 $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = +\infty$ 的充分必要条件是：对于任意从右方收敛于 x_0 的数列$\{x_n\}$（$x_n > x_0$），成立

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty。$$

12. 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ 的充分必要条件是：对于任意正无穷大量$\{x_n\}$，成立

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty。$$

13. 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在而且有限的充分必要条件是：对于任意正无穷大量$\{x_n\}$，相应的函数值数列$\{f(x_n)\}$收敛。

14．分别写出下述函数极限存在而且有限的 Cauchy 收敛原理，并加以证明：

（1）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$；（2）$\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$；（3）$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$。

15．设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上满足函数方程 $f(2x)=f(x)$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，证明

$$f(x)\equiv A,\quad x\in(0,+\infty)。$$

习　题 3.2

1. 按定义证明下列函数在其定义域连续：

(1) $y=\sqrt{x}$； (2) $y=\sin\dfrac{1}{x}$；

(3) $y=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$

2. 确定下列函数的连续范围：

(1) $y=\tan x+\csc x$；

(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{\cos x}}$；

(3) $y=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-3)}{x+1}}$；

(4) $y=[x]\ln(1+x)$；

(5) $y=\left[\dfrac{1}{x}\right]$；

(6) $y=\operatorname{sgn}(\sin x)$。

3. 若 $f(x)$ 在点 x_0 连续，证明 $f^2(x)$ 与 $|f(x)|$ 在点 x_0 也连续。反之，若 $f^2(x)$ 或 $|f(x)|$ 在点 x_0 连续，能否断言 $f(x)$ 在点 x_0 连续?

4. 若 $f(x)$ 在点 x_0 连续，$g(x)$ 在点 x_0 不连续，能否断言 $f(x)\cdot g(x)$ 在点 x_0 不连续? 又若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x_0 都不连续，则上面的断言是否成立?

5. 若 f,g 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\max\{f,g\}$ 与 $\min\{f,g\}$ 在 $[a,b]$ 上连续，其中

$\max\{f,g\}=\max\{f(x),g(x)\}$，$x\in[a,b]$；

$\min\{f,g\}=\min\{f(x),g(x)\}$，$x\in[a,b]$。

6. 若对任意 $\delta>0$，f 在 $[a+\delta,b-\delta]$ 上连续，能否得出

(1) f 在 (a,b) 上连续?

(2) f 在 $[a,b]$ 上连续?

7. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\alpha>0$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\beta$，证明：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=\alpha^{\beta}$；并求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{2x-1}{x+1}}$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$ $(\sin a\neq 0)$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+x}{n-1}\right)^{n}$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right)$。

8. 指出下列函数的不连续点，并确定其不连续的类型：

(1) $y=\dfrac{x^2-1}{x^3-3x+2}$；

(2) $y=[x]\sin\dfrac{1}{x}$；

(3) $y=\dfrac{x}{\sin x}$；

(4) $y=[2x]-2[x]$；

(5) $y=\dfrac{1}{x^n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$；

(6) $y=x\ln^n|x|$；

(7) $y=\dfrac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}$；

(8) $y=\dfrac{\sqrt{1+3x}-1}{\sqrt{1+2x}-1}$；

(9) $y=\begin{cases}\sin\pi x, & x\text{为有理数},\\ 0, & x\text{为无理数};\end{cases}$

(10) $y=\begin{cases}\sin\dfrac{\pi}{p}, & x=\dfrac{q}{p}\ (p,q\text{互质},\ p>0),\\ 0, & x\text{为无理数}.\end{cases}$

9．设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续，且满足 $f(x^2)=f(x)$，$x\in(0,+\infty)$，证明 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为常数函数。

习　题 3.3

1. 确定 a 与 α，使下列各无穷小量或无穷大量等价于(～) ax^{α}：

(1) $u(x)=x^5-3x^4+2x^3$, ($x\to0$，$x\to\infty$)；

(2) $u(x)=\dfrac{x^5+2x^2}{3x^4-x^3}$ ($x\to0$，$x\to\infty$)；

(3) $u(x)=\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x^2}$ ($x\to0+$,$x\to+\infty$)；

(4) $u(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ ($x\to0+$,$x\to+\infty$)；

(5) $u(x)=\sqrt{1+3x}-\sqrt[3]{1+2x}$ ($x\to0$,$x\to+\infty$)；

(6) $u(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ ($x\to+\infty$)；

(7) $u(x)=\sqrt{x^3+x}-x^{\frac{3}{2}}$ ($x\to0+$)；

(8) $u(x)=\sqrt{1+x\sqrt{x}}-\mathrm{e}^{2x}$ ($x\to0+$)；

(9) $u(x)=\ln\cos x-\arctan x^2$ ($x\to0$)；

(10) $u(x)=\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}$ ($x\to0$)。

2. (1) 当 $x\to+\infty$时，下列变量都是无穷大量，将它们从低阶到高阶进行排列，并说明理由。

$$a^x\ (a>1),\quad x^x,\quad x^{\alpha}\ (\alpha>0),\quad \ln^k x\ (k>0),\quad [x]!\ ;$$

(2) 当 $x\to0+$时，下列变量都是无穷小量，将它们从高阶到低阶进行排列，并说明理由

$$x^{\alpha}\ (\alpha>0),\quad \frac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]!},\quad a^{-\frac{1}{x}}\ (a>1),\quad \left(\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{x}},\quad \ln^{-k}\left(\frac{1}{x}\right)\ (k>0)。$$

3. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+2x^2}}{\ln(1+3x)}$；　(2) $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$；　(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}\right)$；

(5) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{a^x-a^{\alpha}}{x-\alpha}$ ($a>0$)；　(6) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^{\alpha}-a^{\alpha}}{x-a}$ ($a>0$)；

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\ln(1+x)-\ln x\right)$；　(8) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$ ($a>0$)；

(9) $\lim\limits_{x\to0}(x+\mathrm{e}^x)^{\frac{1}{x}}$；　(10) $\lim\limits_{x\to0}\left(\cos x-\dfrac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$；

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt[n]{x}-1\right)$ ($x>0$)；　(12) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x}\right)$ ($x>0$)。

习　题 3.4

1．证明：设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$（有限数），则 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 有界。

2．证明：若函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上连续，且 $f(a+)$和 $f(b-)$存在，则它可取到介于 $f(a+)$

和 $f(b-)$之间的一切中间值。

3．证明：若闭区间$[a,b]$上的单调有界函数 $f(x)$ 能取到 $f(a)$和 $f(b)$之间的一切值，则 $f(x)$ 是$[a,b]$上的连续函数。

4．应用 Bolzano-Weierstrass 定理证明闭区间上连续函数的有界性定理。

5．应用闭区间套定理证明零点存在定理。

6. 证明方程 $x = a\sin x + b$ （$a,b > 0$）至少有一个正根。

7．证明方程 $x^3 + px + q = 0$ （$p > 0$）有且仅有一个实根。

8．证明：

（1）$\sin\frac{1}{x}$ 在（0,1）上不一致连续，但在$(a,1)(a>0)$上一致连续；

（2）$\sin x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致连续，但在$[0,A]$上一致连续；

（3）$\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续；

（4）$\ln x$ 在 $[1,+\infty)$上一致连续；

(5) $\cos\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续。

9．证明：对椭圆内的任意一点 P，存在椭圆过 P 的一条弦，使得 P 是该弦的中点。

10．设函数 $f(x)$ 在$[0,2]$上连续，且 $f(0) = f(2)$，证明：存在 x，$y\in[0, 2]$，$y - x = 1$，使得 $f(x) = f(y)$。

11．若函数 $f(x)$ 在有限开区间 (a,b) 上一致连续，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上有界。

12．证明：

（1）某区间上两个一致连续函数之和必定一致连续；

（2）某区间上两个一致连续函数之积不一定一致连续。

13. 设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，且 $f(x)\neq 0,\ x\in[a,b]$，证明 $f(x)$ 在$[a,b]$上恒正或恒负。

14．设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，$a \le x_1 < x_2 < \cdots < x_n \le b$，证明在$[a,b]$中必有$\xi$，使得

$$f(\xi) = \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)]。$$

15．若函数 $f(x)$ 在$[a,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ (有限数)，则 $f(x)$ 在$[a,+\infty)$ 上一致连续。