第三章 函数逼近

现代数值数学和计算课程

函数逼近

若存在一个函数序列$\{p_n(x)\}$, 满足$\lim_{n\to+\infty}\|p_n-f\|=0$, 则称$\{p_n(x)\}$是函数$f(x)$的逼近。

函数逼近

若存在一个函数序列$\{p_n(x)\}$, 满足$\lim\limits_{n\to+\infty}\|p_n-f\|=0$,

则称$\{p_n(x)\}$是函数$f(x)$的逼近。

若$\|\bullet\|$定义为

$$\|p(x)\|=\|p(x)\|_\infty=\max_{a\le x\le b}|p(x)|,$$

$$\|p(x)\|=\|p(x)\|_2=\left(\int_a^b p^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

则称这种逼近是一致逼近/平方逼近。

内积与正交多项式: 权

定义3.1 设$[a, b]$为有限或无限区间, $\rho(x)$满足:

- $\rho(x)$在$[a, b]$上非负;
- $\int_a^b x^k \rho(x) \mathrm{d}x$对于$k = 0, 1, \cdots$都存在;
- 对于任何$f(x) \in C[a, b]$, $f(x) \geq 0$, 若$\int_a^b f(x)\rho(x)\mathrm{d}x = 0$, 则$f(x) \equiv 0$;

称$\rho(x)$为$[a, b]$上的**权函数**。

内积与正交多项式: 权

定义3.1 设$[a,b]$为有限或无限区间, $\rho(x)$满足:

- $\rho(x)$在$[a,b]$上非负;
- $\int_a^b x^k\rho(x)\mathrm{d}x$对于$k=0,1,\cdots$都存在;
- 对于任何$f(x)\in C[a,b]$, $f(x)\geq 0$, 若$\int_a^b f(x)\rho(x)\mathrm{d}x=0$, 则$f(x)\equiv 0$;

称$\rho(x)$为$[a,b]$上的权函数。常见的权函数及其区间

$$\rho(x)=1,\quad [-1,1];\qquad \rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad [-1,1];$$

$$\rho(x)=\mathrm{e}^{-x},\quad [0,+\infty);\qquad \rho(x)=\mathrm{e}^{-x^2},\quad (-\infty,+\infty).$$

内积

定义3.2 设$f(x), g(x) \in C[a,b]$, $\rho(x)$为$[a,b]$上的权函数, 定义

$$(f,g) = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x) \mathrm{d}x$$

为函数$f(x)$与$g(x)$的内积。

内积

定义3.2 设$f(x), g(x) \in C[a,b]$, $\rho(x)$为$[a,b]$上的权函数, 定义

$$(f,g) = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x) \mathrm{d}x$$

为函数$f(x)$与$g(x)$的内积。内积满足的基本性质

- $(f,g) = (g,f)$;
- $(c_1 f_1 + c_2 f_2, g) = c_1(f_1, g) + c_2(f_2, g)$;
- $(f,f) \geq 0$, 并且当且仅当$f \equiv 0$时$(f,f) = 0$.

正交

定义3.3 设$f(x), g(x) \in C[a,b]$, $\rho(x)$为$[a,b]$上的权函数, 若内积$(f,g) = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x) \mathrm{d}x = 0$, 则称$f(x)$, $g(x)$在$[a,b]$上带权$\rho(x)$正交。

正交

定义3.3 设$f(x), g(x) \in C[a,b]$, $\rho(x)$为$[a,b]$上的权函数, 若内积$(f,g)=\int_a^b \rho(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x=0$, 则称$f(x)$, $g(x)$在$[a,b]$上带权$\rho(x)$正交。

定义3.4 设$[a,b]$上有连续函数系$\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x), \cdots\}$, 若满足条件

$$(\varphi_i, \varphi_j)=\int_a^b \rho(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\mathrm{d}x=\begin{cases} 0, & i \neq j, \\ A_j>0, & i=j, \end{cases}$$

$(i,j=0,1,\cdots)$则称函数系$\{\varphi_k(x)\}$是$[a,b]$上带权$\rho(x)$的正交函数系。

正交

定义3.3 设$f(x), g(x) \in C[a,b]$, $\rho(x)$为$[a,b]$上的权函数, 若内积$(f,g) = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x) \mathrm{d}x = 0$, 则称$f(x)$, $g(x)$在$[a,b]$上带权$\rho(x)$正交。

定义3.4 设$[a,b]$上有连续函数系
$\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x), \cdots\}$, 若满足条件

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \int_a^b \rho(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ A_j > 0, & i = j, \end{cases}$$

$(i, j = 0, 1, \cdots)$则称函数系$\{\varphi_k(x)\}$是$[a,b]$上带权$\rho(x)$的正交函数系。

定义3.5 若上述φ_n是n次多项式, 称为正交多项式。

正交

例: 三角函数系$1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \cdots$是区间$[-\pi, \pi]$上的关于权$\rho(x) = 1$的正交函数系。

正交

例: 三角函数系$1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \cdots$是区间$[-\pi, \pi]$上的正交函数系。

正交

	勒让德(Legendre)	切比雪夫(Chebyshev)
权	1	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
区间	$[-1,1]$	$[-1,1]$
通项	$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\{(x^2-1)^n\}$	$T_n(x)=\cos(n\arccos x)$
正交	$(P_m,P_n)=\frac{2}{2n+1}\delta_{mn}$	$(T_n,T_m)=\begin{cases}\pi, & m=n=0\\ \frac{\pi}{2}\delta_{mn}, & \text{other}\end{cases}$
递推	$P_0(x)=1,$ $P_1(x)=x,$ $P_{n+1}(x)$ $=\frac{2n+1}{n+1}xP_n(x)-\frac{n}{n+1}P_{n-1}(x)$	$T_0(x)=1,$ $T_1(x)=x,$ $T_{n+1}(x)$ $=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)$
奇偶	$P_n(-x)=(-1)^nP_n(x)$	$T_n(-x)=(-1)^nT_n(x)$
其它		根$\{\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\}_1^n$极值点$\{\cos\frac{k}{n}\pi\}_0^n$

正交

	拉盖尔(Laguerre)	埃尔米特(Hermite)
权	e^{-x}	e^{-x^2}
区间	$[0,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
通项	$L_n(x)=\mathrm{e}^x\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n\mathrm{e}^{-n})$	$H_n(x)=(-1)^n\mathrm{e}^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{e}^{-x^2}$
正交	$(L_n,L_m)=(n!)^2\delta_{mn}$	$(H_n,H_m)=2^n n!\sqrt{\pi}\delta_{mn}$
递推	$L_0(x)=1,$ $L_1(x)=1-x,$ $L_{n+1}(x)$ $=(1+2n-x)L_n(x)-n^2L_{n-1}(x)$	$H_0(x)=1,$ $H_1(x)=2x,$ $H_{n+1}(x)$ $=2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x)$
奇偶		$H_n(-x)=(-1)^nH_n(x)$
其它		

最佳一致逼近

定理3.1(Weierstrass定理) 设$f(x) \in C[a,b]$, 那么对于任意给定的ε, 都存在这样的多项式$p(x)$, 使得

$$\max_{a \le x \le b} |p(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

最佳一致逼近

定理3.1(Weierstrass定理) 设$f(x) \in C[a,b]$, 那么对于任意给定的ε, 都存在这样的多项式$p(x)$, 使得

$$\max_{a \le x \le b} |p(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

定义3.6 这样的多项式称为一致逼近多项式。

最佳一致逼近

定理3.1(Weierstrass定理) 设$f(x) \in C[a,b]$, 那么对于任意给定的ε, 都存在这样的多项式$p(x)$, 使得

$$\max_{a \le x \le b} |p(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

定义3.6 这样的多项式称为一致逼近多项式。

- 若多项式次数n固定, 求一个多项式$p_n^*(x)$, 使下式最小:

$$\max_{a \le x \le b} |p_n^*(x) - f(x)|$$

最佳一致逼近

定理3.1(Weierstrass定理) 设$f(x) \in C[a,b]$, 那么对于任意给定的ε, 都存在这样的多项式$p(x)$, 使得

$$\max_{a \le x \le b} |p(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

定义3.6 这样的多项式称为一致逼近多项式。

- 若多项式次数n固定, 求一个多项式$p_n^*(x)$, 使下式最小:
$$\max_{a \le x \le b} |p_n^*(x) - f(x)|$$
- 若给定逼近精度ε, 求次数较低的逼近多项式。

最佳一致逼近

定义3.7 记P_n为次数不超过n的多项式的集合, 设$f(x) \in C[a,b]$, $p(x) \in P_n$, 记

$$\|p - f\|_\infty = \max_{a \le x \le b} |p(x) - f(x)| = \mu,$$

μ称为$p(x)$与$f(x)$的偏差。若存在$x_0 \in [a,b]$使$|p(x_0) - f(x_0)| = \mu$, 称x_0是$p(x)$关于$f(x)$的偏差点。若$p(x_0) - f(x_0) = \mu$或$-\mu$，称x_0为正或负偏差点。

最佳一致逼近

定义3.8 设$f(x) \in C[a,b]$, 若存在$p_n^*(x) \in P_n$, 使

$$\|p_n^* - f\|_\infty = \min_{p \in P_n} \|p - f\|_\infty$$

则称p_n^*为$f(x)$在$[a,b]$上的最佳一致逼近多项式，简称最佳逼近多项式。

最佳一致逼近

定义3.8 设$f(x) \in C[a,b]$, 若存在$p_n^*(x) \in P_n$, 使

$$\|p_n^* - f\|_\infty = \min_{p \in P_n} \|p - f\|_\infty$$

则称p_n^*为$f(x)$在$[a,b]$上的最佳一致逼近多项式，简称最佳逼近多项式。

定理3.2 最佳逼近多项式存在且唯一。

最佳一致逼近

定义3.8 设$f(x) \in C[a,b]$, 若存在$p_n^*(x) \in P_n$, 使

$$\|p_n^* - f\|_\infty = \min_{p \in P_n} \|p - f\|_\infty$$

则称p_n^*为$f(x)$在$[a,b]$上的最佳一致逼近多项式，简称最佳逼近多项式。

定理3.2 最佳逼近多项式存在且唯一。

定理3.3 (切比雪夫定理)$p_n^*(x) \in P_n$是$f(x) \in C[a,b]$的最佳逼近多项式的充分必要条件是: 存在切比雪夫交错点组$\{x_k\}_{k=1}^{n+2}$, 即x_k, $k = 1, 2, \cdots, n+2$是轮流为正负的偏差点, 也即对$k = 1, 2, \cdots, n+2$,

$$p_n^*(x_k) - f(x_k) = (-1)^k \sigma \|p_n^* - f\|_\infty, \quad \sigma = \pm 1.$$

最佳一致逼近: 最简单的例子

问题: 设$f(x)$在$[a,b]$上有二阶导数, 且f''在$[a,b]$上不变号, 求f的线性最佳一致逼近多项式$p_1^*(x) = a_0 + a_1 x$.

最佳一致逼近: 最简单的例子

问题: 设$f(x)$在$[a,b]$上有二阶导数, 且f''在$[a,b]$上不变号, 求f的线性最佳一致逼近多项式$p_1^*(x) = a_0 + a_1 x$.
由上述定理, 存在$a \le x_1 < x_2 < x_3 \le b$使

$$p_1(x_k) - f(x_k) = (-1)^k \sigma \max_{a \le x \le b} |p_1(x) - f(x)|, \quad \sigma = \pm 1,$$

$k = 1, 2, 3.$

最佳一致逼近: 最简单的例子

问题: 设$f(x)$在$[a,b]$上有二阶导数, 且f''在$[a,b]$上不变号, 求f的线性最佳一致逼近多项式$p_1^*(x) = a_0 + a_1 x$. 由上述定理, 存在$a \le x_1 < x_2 < x_3 \le b$使

$$p_1(x_k) - f(x_k) = (-1)^k \sigma \max_{a \le x \le b} |p_1(x) - f(x)|, \quad \sigma = \pm 1,$$

$k = 1, 2, 3$. 可导函数值取到最大只有两种情形: 导数为零, 或是区间端点。

最佳一致逼近: 最简单的例子

问题: 设$f(x)$在$[a,b]$上有二阶导数, 且f''在$[a,b]$上不变号, 求f的线性最佳一致逼近多项式$p_1^*(x) = a_0 + a_1 x$.
由上述定理, 存在$a \le x_1 < x_2 < x_3 \le b$使

$$p_1(x_k) - f(x_k) = (-1)^k \sigma \max_{a \le x \le b} |p_1(x) - f(x)|, \quad \sigma = \pm 1,$$

$k = 1, 2, 3.$ f''定号, f'单调, $p' - f'$单调, $p' - f' = 0$在区间上至多有一根。

最佳一致逼近: 最简单的例子

问题: 设$f(x)$在$[a,b]$上有二阶导数, 且f''在$[a,b]$上不变号, 求f的线性最佳一致逼近多项式$p_1^*(x) = a_0 + a_1 x$. 由上述定理, 存在$a \le x_1 < x_2 < x_3 \le b$使

$$p_1(x_k) - f(x_k) = (-1)^k \sigma \max_{a \le x \le b} |p_1(x) - f(x)|, \quad \sigma = \pm 1,$$

$k = 1, 2, 3.$ 因此, $x_1 = a$, $x_3 = b$.

$$p_1(a) - f(a) = -[p_1(x_2) - f(x_2)] = p_1(b) - f(b)$$

最佳一致逼近: 最简单的例子

问题: 设$f(x)$在$[a,b]$上有二阶导数, 且f''在$[a,b]$上不变号, 求f的线性最佳一致逼近多项式$p_1^*(x) = a_0 + a_1 x$.
由上述定理, 存在$a \le x_1 < x_2 < x_3 \le b$使

$$p_1(x_k) - f(x_k) = (-1)^k \sigma \max_{a \le x \le b} |p_1(x) - f(x)|, \quad \sigma = \pm 1,$$

$k = 1, 2, 3.$ 因此, $x_1 = a$, $x_3 = b$.

$$p_1(a) - f(a) = -[p_1(x_2) - f(x_2)] = p_1(b) - f(b)$$

$$a_0 + a_1 a - f(a) = a_0 + a_1 b - f(b)$$

最佳一致逼近: 最简单的例子

问题: 设$f(x)$在$[a,b]$上有二阶导数, 且f''在$[a,b]$上不变号, 求f的线性最佳一致逼近多项式$p_1^*(x) = a_0 + a_1 x$. 由上述定理, 存在$a \le x_1 < x_2 < x_3 \le b$使

$$p_1(x_k) - f(x_k) = (-1)^k \sigma \max_{a \le x \le b} |p_1(x) - f(x)|, \quad \sigma = \pm 1,$$

$k = 1, 2, 3.$ 因此, $x_1 = a$, $x_3 = b$.

$$p_1(a) - f(a) = -[p_1(x_2) - f(x_2)] = p_1(b) - f(b)$$

$$a_0 + a_1 a - f(a) = a_0 + a_1 b - f(b) \Rightarrow a_1 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

最佳一致逼近: 最简单的例子

问题: 设$f(x)$在$[a,b]$上有二阶导数, 且f''在$[a,b]$上不变号, 求f的线性最佳一致逼近多项式$p_1^*(x) = a_0 + a_1 x$. 由上述定理, 存在$a \le x_1 < x_2 < x_3 \le b$使

$$p_1(x_k) - f(x_k) = (-1)^k \sigma \max_{a \le x \le b} |p_1(x) - f(x)|, \quad \sigma = \pm 1,$$

$k = 1, 2, 3.$ 因此, $x_1 = a$, $x_3 = b$.

$$p_1(a) - f(a) = -[p_1(x_2) - f(x_2)] = p_1(b) - f(b)$$

$$a_0 + a_1 a - f(a) = a_0 + a_1 b - f(b) \Rightarrow a_1 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$f'(x_2) = a_1$求得x_2.

最佳一致逼近: 最简单的例子

问题: 设$f(x)$在$[a,b]$上有二阶导数, 且f''在$[a,b]$上不变号, 求f的线性最佳一致逼近多项式$p_1^*(x) = a_0 + a_1 x$. 由上述定理, 存在$a \le x_1 < x_2 < x_3 \le b$使

$$p_1(x_k) - f(x_k) = (-1)^k \sigma \max_{a \le x \le b} |p_1(x) - f(x)|, \quad \sigma = \pm 1,$$

$k = 1, 2, 3$. 因此, $x_1 = a$, $x_3 = b$.

$$p_1(a) - f(a) = -[p_1(x_2) - f(x_2)] = p_1(b) - f(b)$$

$$a_0 + a_1 a - f(a) = a_0 + a_1 b - f(b) \Rightarrow a_1 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

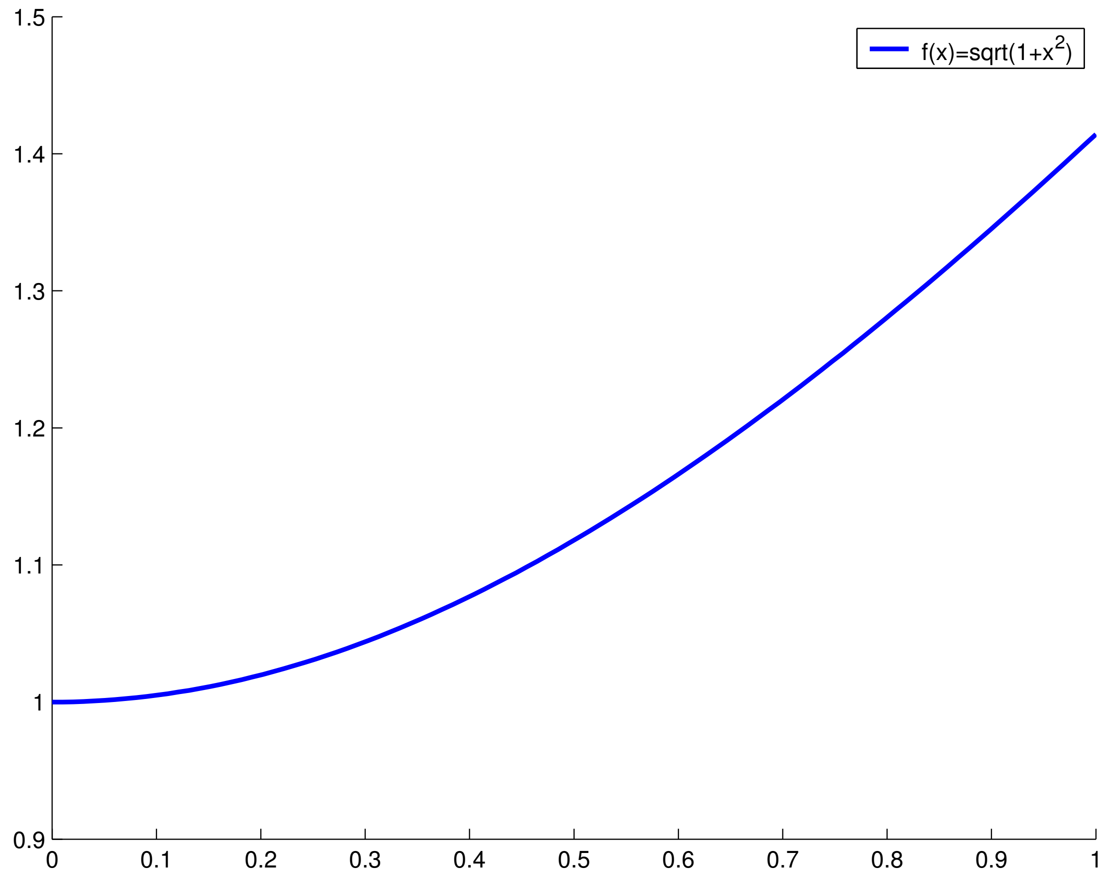
可求得 $a_0 = [f(a) + f(x_2)]/2 - a_1(a + x_2)/2.$

最佳一致逼近: 最简单的例子

几何意义(nademo4)

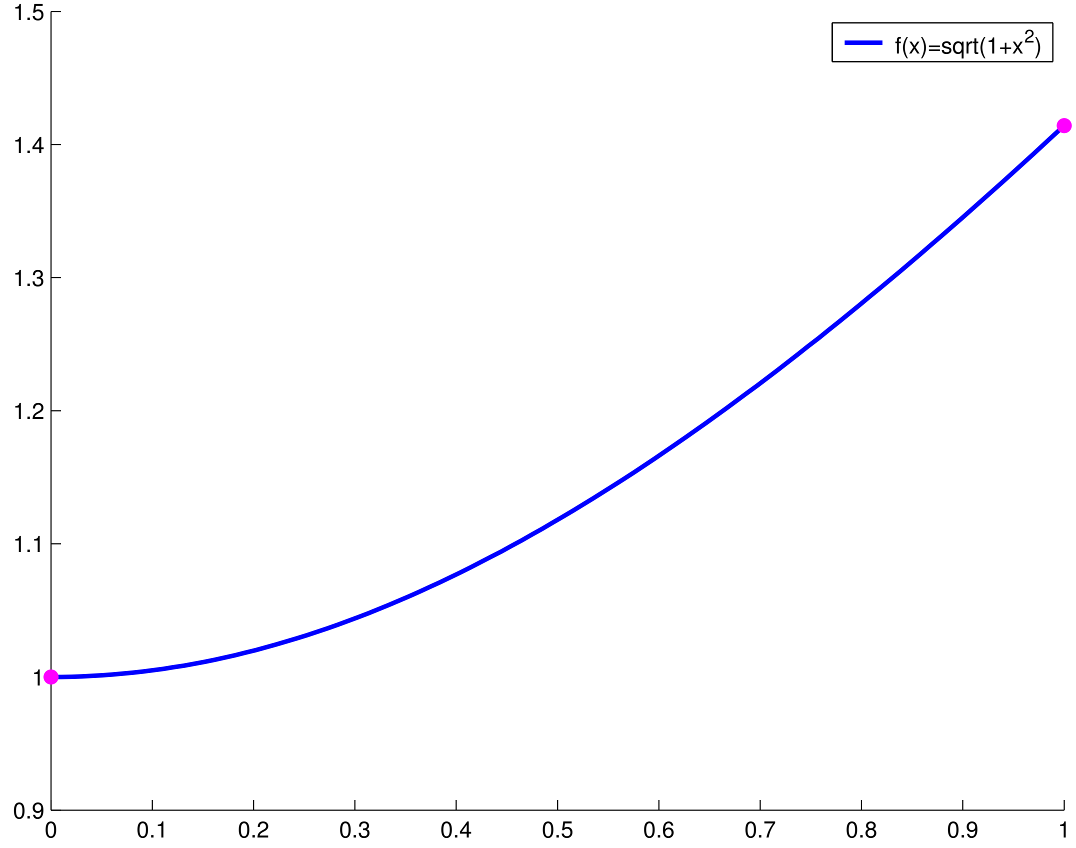
最佳一致逼近: 最简单的例子

几何意义(nademo4)



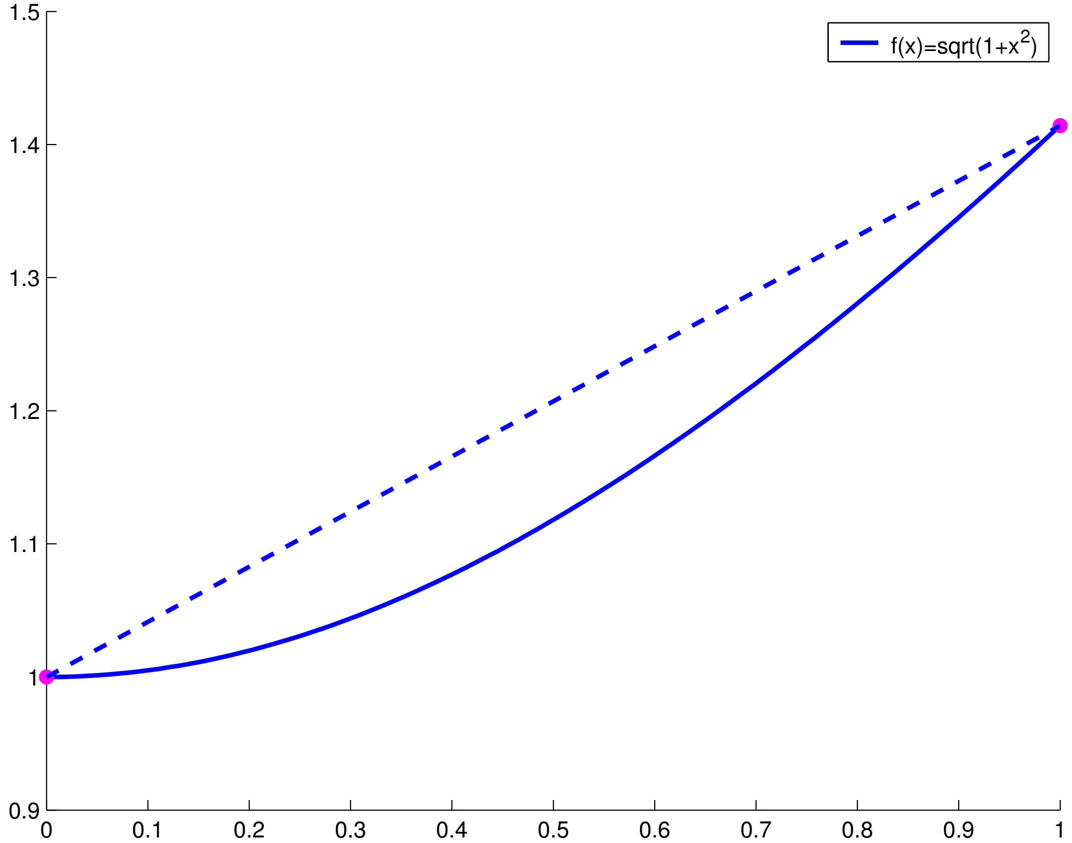
最佳一致逼近: 最简单的例子

几何意义(nademo4)



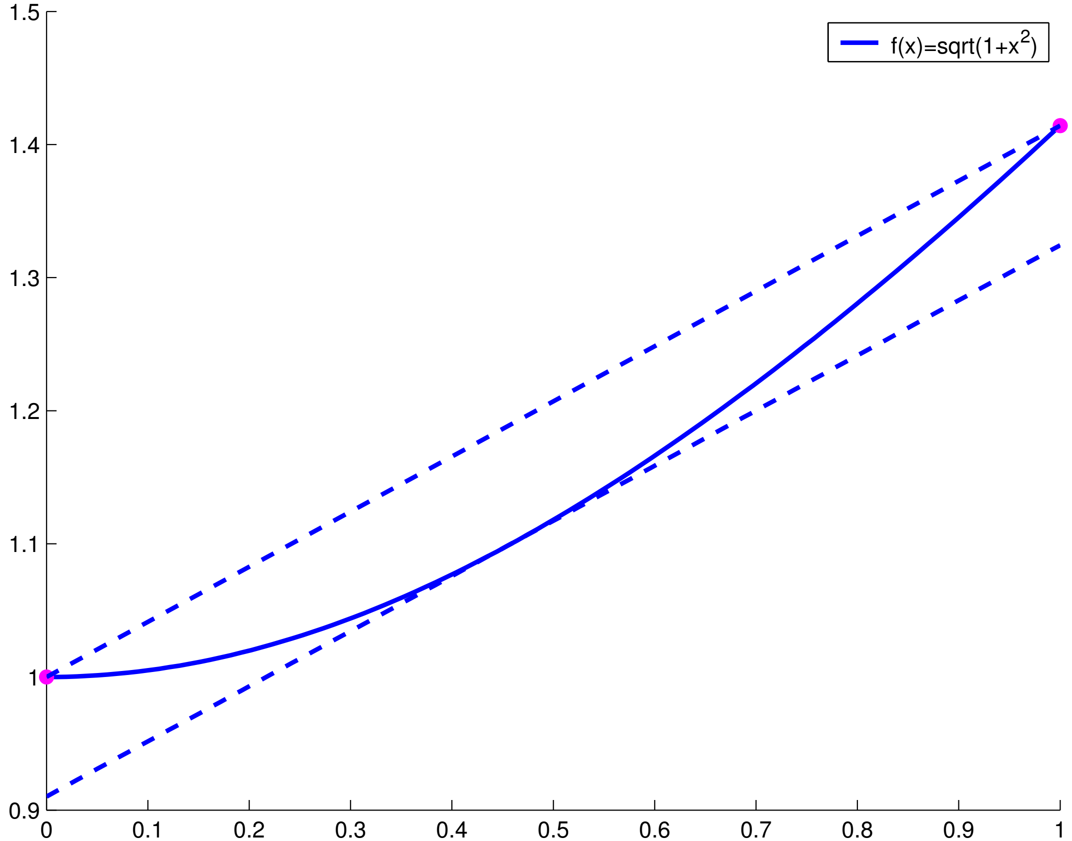
最佳一致逼近: 最简单的例子

几何意义(nademo4)



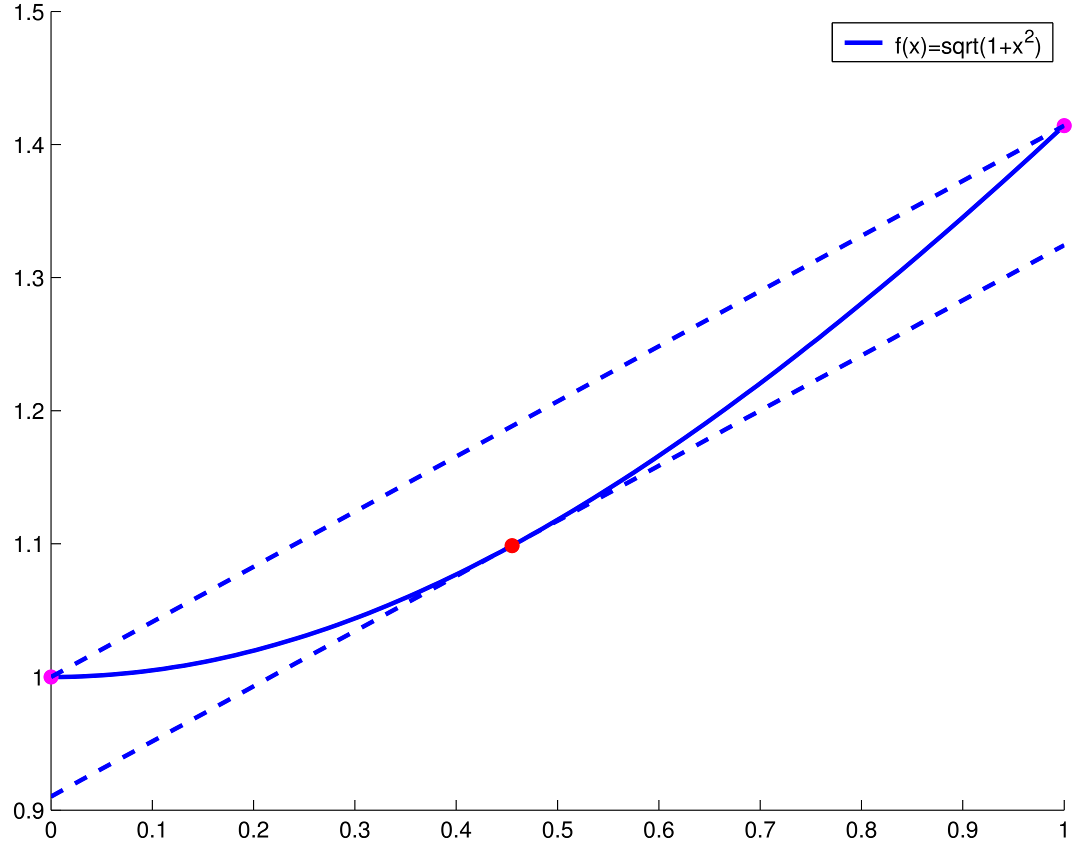
最佳一致逼近: 最简单的例子

几何意义(nademo4)



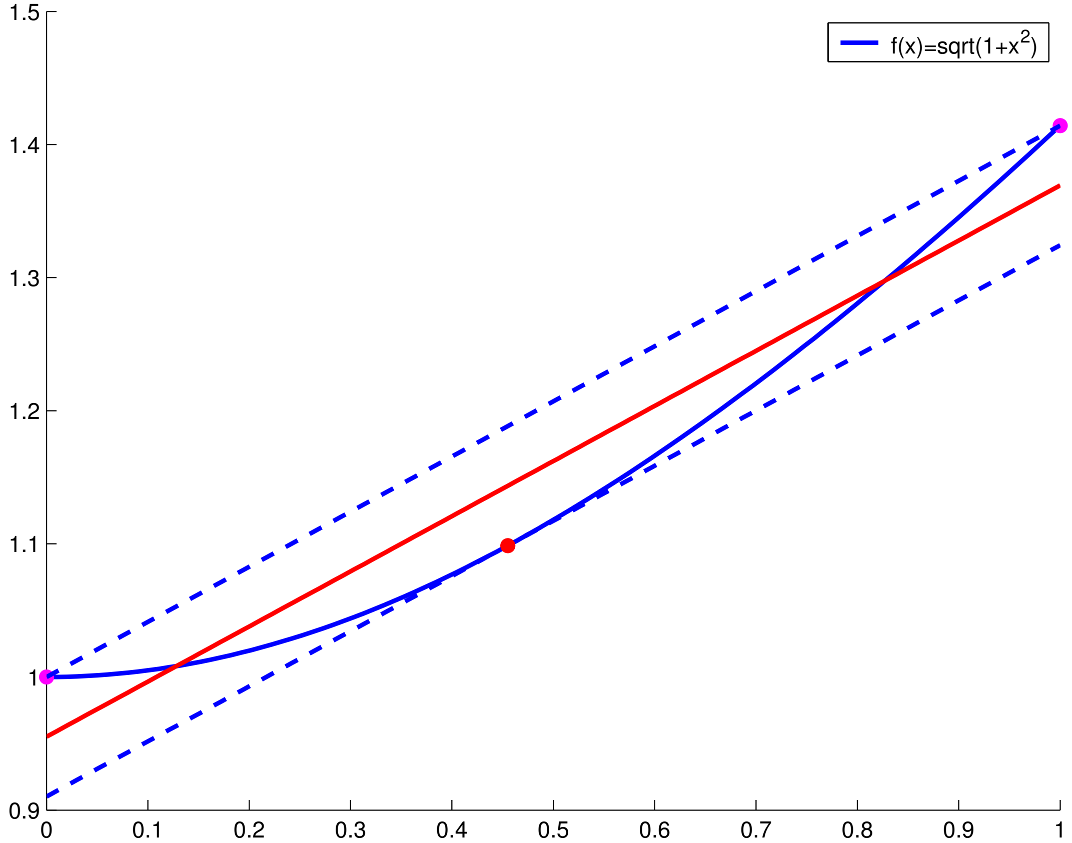
最佳一致逼近: 最简单的例子

几何意义(nademo4)



最佳一致逼近: 最简单的例子

几何意义(nademo4)



最佳一致逼近: 最简单的例子

例3.2 设$f(x)=\sqrt{1+x^2}$, 在$[0,1]$上求$f(x)$的最佳一致逼近多项式$p_1(x)=a_0+a_1x$.

最佳一致逼近: 最简单的例子

例3.2 设$f(x)=\sqrt{1+x^2}$, 在$[0,1]$上求$f(x)$的最佳一致逼近多项式$p_1(x)=a_0+a_1x$.

$$a_1=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\sqrt{2}-1=0.414.$$

最佳一致逼近: 最简单的例子

例3.2 设$f(x)=\sqrt{1+x^2}$, 在$[0,1]$上求$f(x)$的最佳一致逼近多项式$p_1(x)=a_0+a_1x$.

$$a_1=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\sqrt{2}-1=0.414.$$

$$f'(x_2)=\frac{x_2}{\sqrt{1+x_2^2}}=a_1$$

最佳一致逼近: 最简单的例子

例3.2 设$f(x)=\sqrt{1+x^2}$, 在$[0,1]$上求$f(x)$的最佳一致逼近多项式$p_1(x)=a_0+a_1x$.

$$a_1=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\sqrt{2}-1=0.414.$$

$$f'(x_2)=\frac{x_2}{\sqrt{1+x_2^2}}=a_1\Rightarrow x_2=\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}=0.4551.$$

最佳一致逼近: 最简单的例子

例3.2 设$f(x)=\sqrt{1+x^2}$, 在$[0,1]$上求$f(x)$的最佳一致逼近多项式$p_1(x)=a_0+a_1x$.

$$a_1=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\sqrt{2}-1=0.414.$$

$$f'(x_2)=\frac{x_2}{\sqrt{1+x_2^2}}=a_1\Rightarrow x_2=\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}=0.4551.$$

$$f(x_2)=1.0986$$

最佳一致逼近: 最简单的例子

例3.2 设$f(x)=\sqrt{1+x^2}$, 在$[0,1]$上求$f(x)$的最佳一致逼近多项式$p_1(x)=a_0+a_1x$.

$$a_1=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\sqrt{2}-1=0.414.$$

$$f'(x_2)=\frac{x_2}{\sqrt{1+x_2^2}}=a_1 \Rightarrow x_2=\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}=0.4551.$$

$$f(x_2)=1.0986$$

$$a_0=0.955$$

最佳一致逼近: 最简单的例子

例3.2 设$f(x)=\sqrt{1+x^2}$, 在$[0,1]$上求$f(x)$的最佳一致逼近多项式$p_1(x)=a_0+a_1x$.

$$a_1=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\sqrt{2}-1=0.414.$$

$$f'(x_2)=\frac{x_2}{\sqrt{1+x_2^2}}=a_1 \Rightarrow x_2=\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}=0.4551.$$

$$f(x_2)=1.0986$$

$$a_0=0.955 \Rightarrow p_1(x)=0.955+0.414x$$

切比雪夫展开/近似最佳逼近多项式

定理3.4 所有最高项系数为1的n次多项式中, 在区间$[-1,1]$上与零偏差最小的多项式是$\tilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$.

切比雪夫展开/近似最佳逼近多项式

定理3.4 所有最高项系数为1的n次多项式中, 在区间$[-1,1]$上与零偏差最小的多项式是$\tilde{T}_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$.

证明:

切比雪夫展开/近似最佳逼近多项式

定理3.4 所有最高项系数为1的n次多项式中, 在区间$[-1,1]$上与零偏差最小的多项式是$\tilde{T}_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$.

证明: 由于$\tilde{T}_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)=x^n-p^*_{n-1}(x)$, 当$x_k=\cos\frac{k}{n}\pi$, $k=0,1,\cdots,n$, 有

$$\tilde{T}_n(x_k)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos k\pi=\frac{(-1)^k}{2^{n-1}}.$$

切比雪夫展开/近似最佳逼近多项式

定理3.4 所有最高项系数为1的n次多项式中，在区间$[-1,1]$上与零偏差最小的多项式是$\tilde{T}_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$.

证明： 由于$\tilde{T}_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)=x^n-p_{n-1}^*(x)$, 当$x_k=\cos\frac{k}{n}\pi$, $k=0,1,\cdots,n$, 有

$$\tilde{T}_n(x_k)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos k\pi=\frac{(-1)^k}{2^{n-1}}.$$

它表明$p_{n-1}^*(x)$与$f(x)=x^n$有$n+1$个轮流为正负的偏差点，根据定理3.3可知，$p_{n-1}^*(x)$是$f(x)=x^n$的最佳逼近多项式，即

$$\max_{-1\le x\le 1}|\tilde{T}_n(x)|=\min_{P_{n-1}}\|x^n-p_{n-1}(x)\|_\infty.$$

所以$\tilde{T}_n(x)$是$[-1,1]$上与零偏差最小的多项式。

切比雪夫展开/近似最佳逼近多项式

例3.3 设$f(x) = x^4$, 在$[-1, 1]$上求$f(x)$在P_3中的最佳逼近多项式。

切比雪夫展开/近似最佳逼近多项式

例3.3 设$f(x) = x^4$, 在$[-1, 1]$上求$f(x)$在P_3中的最佳逼近多项式。

解:

切比雪夫展开/近似最佳逼近多项式

例3.3 设$f(x) = x^4$, 在$[-1,1]$上求$f(x)$在P_3中的最佳逼近多项式。

解: 根据定理3.3, 已知$\tilde{T}_4(x) = \frac{1}{8}(8x^4 - 8x^2 + 1) = x^4 - (x^2 - \frac{1}{8})$,
于是可知所求最佳逼近多项式为$p_3^*(x) = x^2 - \frac{1}{8}$.

切比雪夫展开/近似最佳逼近多项式

例3.3 设$f(x)=x^4$, 在$[-1,1]$上求$f(x)$在P_3中的最佳逼近多项式。

解: 根据定理3.3, 已知$\tilde{T}_4(x)=\frac{1}{8}(8x^4-8x^2+1)=x^4-(x^2-\frac{1}{8})$, 于是可知所求最佳逼近多项式为$p_3^*(x)=x^2-\frac{1}{8}$.

设$f(x)\in[0,1]$的**Lagrange**插值多项式为$L_n(x)$, 其余项可表示为

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=a_{n+1}\Pi(x)=a_{n+1}\prod_{k=0}^{n}(x-x_k),$$

若取$\prod\limits_{k=0}^{n}(x-x_k)=\tilde{T}_{n+1}(x)$, 这时插值节点为$\tilde{T}_{n+1}$的$n+1$个零点

$x_k=\cos\frac{2(k+1)\pi}{2(n+1)}, k=0,1,\cdots,n.$

切比雪夫展开/近似最佳逼近多项式

例3.3 设$f(x)=x^4$, 在$[-1,1]$上求$f(x)$在P_3中的最佳逼近多项式。

解: 根据定理3.3, 已知$\tilde{T}_4(x)=\frac{1}{8}(8x^4-8x^2+1)=x^4-(x^2-\frac{1}{8})$, 于是可知所求最佳逼近多项式为$p_3^*(x)=x^2-\frac{1}{8}$.

设$f(x)\in[0,1]$的**Lagrange**插值多项式为$L_n(x)$, 其余项可表示为

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=a_{n+1}\Pi(x)=a_{n+1}\prod_{k=0}^{n}(x-x_k),$$

若取$\prod\limits_{k=0}^{n}(x-x_k)=\tilde{T}_{n+1}(x)$, 这时插值节点为$\tilde{T}_{n+1}$的$n+1$个零点$x_k=\cos\frac{2(k+1)\pi}{2(n+1)}$, $k=0,1,\cdots,n$. 这样构造的插值多项式$L_n(x)$, 其误差分布均匀, 可作为最佳逼近多项式的近似。

切比雪夫展开/近似最佳逼近多项式

$$f(x) = \frac{a_0^*}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^* T_k(x)$$

切比雪夫展开/近似最佳逼近多项式

$$f(x) = \frac{a_0^*}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^* T_k(x)$$

乘以$T_k(x)\rho(x)$, 并在$[-1,1]$上积分,

$$a_k^* = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(x)T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x, \quad k = 0, 1, \cdots .$$

切比雪夫展开/近似最佳逼近多项式

$$f(x) = \frac{a_0^*}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^* T_k(x)$$

乘以$T_k(x)\rho(x)$, 并在$[-1,1]$上积分,

$$a_k^* = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(x)T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x, \quad k = 0, 1, \cdots .$$

$$f(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k^* T_k(x) \approx a_{n+1}^* T_{n+1}(x).$$

切比雪夫展开/近似最佳逼近多项式

例3.4 设$f(x)=\mathrm{e}^x$, 在$[-1,1]$上按切比雪夫多项式展开, 并计算到$n=3$.

切比雪夫展开/近似最佳逼近多项式

例3.4 设$f(x) = \mathrm{e}^x$, 在$[-1, 1]$上按切比雪夫多项式展开, 并计算到$n = 3$.

解:

切比雪夫展开/近似最佳逼近多项式

例3.4 设$f(x)=\mathrm{e}^x$, 在$[-1,1]$上按切比雪夫多项式展开, 并计算到$n=3$.

解:

$$a_k^* = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{e}^x T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\cos\theta}\cos k\theta\mathrm{d}\theta$$

切比雪夫展开/近似最佳逼近多项式

例3.4 设$f(x) = \mathrm{e}^x$, 在$[-1, 1]$上按切比雪夫多项式展开, 并计算到$n = 3$.

解:

$$a_k^* = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{e}^x T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\mathrm{e}^{\cos\theta}\cos k\theta \mathrm{d}\theta$$

利用公式可算得$a_0^* = 2.532$, $a_1^* = 1.130$, $a_2^* = 0.271$, $a_3^* = 0.044$.

切比雪夫展开/近似最佳逼近多项式

例3.4 设$f(x) = \mathrm{e}^x$, 在$[-1, 1]$上按切比雪夫多项式展开, 并计算到$n = 3$.

解:

$$a_k^* = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{e}^x T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\cos\theta}\cos k\theta\mathrm{d}\theta$$

利用公式可算得$a_0^* = 2.532$, $a_1^* = 1.130$, $a_2^* = 0.271$, $a_3^* = 0.044$.

$$\begin{aligned} f(x) \approx & \quad \frac{a_0^*}{2} + a_1^* T_1(x) + a_2^* T_2(x) + a_3^* T_3(x) \\ = & \quad 0.994571 + 0.99730x + 0.542991x^2 + 0.177347x^3. \end{aligned}$$

切比雪夫展开/近似最佳逼近多项式

例3.4 设$f(x)=\mathrm{e}^x$, 在$[-1,1]$上按切比雪夫多项式展开, 并计算到$n=3$.

解:

$$a_k^* = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{e}^x T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\cos\theta}\cos k\theta \mathrm{d}\theta$$

利用公式可算得$a_0^* = 2.532,\ a_1^* = 1.130,\ a_2^* = 0.271,\ a_3^* = 0.044.$

$$\begin{aligned} f(x) \approx\ & \frac{a_0^*}{2} + a_1^*T_1(x) + a_2^*T_2(x) + a_3^*T_3(x) \\ =\ & 0.994571 + 0.99730x + 0.542991x^2 + 0.177347x^3. \end{aligned}$$

误差约为0.00607.

最佳平方逼近

- 设$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)$是$[a, b]$上的线性无关的连续函数, $a_0, a_1, \cdots, a_n$是任意实数, 则

$$\begin{aligned}\Phi &= \{s(x) \mid s(x) = a_0\varphi_0(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x)\} \\ &\triangleq \operatorname{span}\{\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n\}\end{aligned}$$

并称集合Φ是由$\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n$所生成的线性空间, $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n$是生成空间$\Phi$的一个基底。

最佳平方逼近

- 设$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x) \in C[a,b]$, 则它们在$[a,b]$上线性无关的充要条件是$\det G_n \neq 0$, 其中

$$
\begin{aligned}
G_n = & \ G(\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n) \\
= & \begin{pmatrix}
(\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_n) \\
(\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_n) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
(\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_n)
\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

最佳平方逼近

- 设$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x) \in C[a,b]$, 则它们在$[a,b]$上线性无关的充要条件是$\det G_n \neq 0$, 其中

$$
\begin{aligned}
G_n &= G(\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n) \\
&= \begin{pmatrix}
(\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_n) \\
(\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_n) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
(\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_n)
\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

必要:

最佳平方逼近

- 设$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x) \in C[a,b]$, 则它们在$[a,b]$上线性无关的充要条件是$\det G_n \neq 0$, 其中

$$\begin{aligned} G_n &= G(\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n) \\ &= \begin{pmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_n) \\ (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_n) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

必要:

$$\sum_{i=0}^{n} c_i(\varphi_i, \varphi_j) = 0$$

最佳平方逼近

- 设$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x) \in C[a,b]$, 则它们在$[a,b]$上线性无关的充要条件是$\det G_n \neq 0$, 其中

$$
\begin{aligned}
G_n = \;& G(\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n) \\
= \;& \begin{pmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_n) \\ (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_n) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

必要:

$$
\sum_{j=0}^{n} c_j \sum_{i=0}^{n} c_i(\varphi_i, \varphi_j) = 0
$$

最佳平方逼近

- 设$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x) \in C[a,b]$, 则它们在$[a,b]$上线性无关的充要条件是$\det G_n \neq 0$, 其中

$$
\begin{aligned}
G_n &= G(\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n) \\
&= \begin{pmatrix}
(\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_n) \\
(\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_n) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
(\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_n)
\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

必要:

$$
\sum_{j=0}^{n} c_j \sum_{i=0}^{n} c_i (\varphi_i, \varphi_j) = 0 \Rightarrow \left(\sum_{i=0}^{n} c_i \varphi_i, \sum_{j=0}^{n} c_j \varphi_j \right) = 0
$$

最佳平方逼近

- 设$\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)\in C[a,b]$, 则它们在$[a,b]$上线性无关的充要条件是$\det G_n\neq 0$, 其中

$$\begin{aligned} G_n = & \ G(\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n) \\ = & \begin{pmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n) \\ (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

必要:

$$\left(\sum_{i=0}^{n} c_i\varphi_i,\sum_{j=0}^{n} c_j\varphi_j\right)=0\Rightarrow\sum_{i=0}^{n} c_i\varphi_i=0\Rightarrow c_i=0$$

最佳平方逼近

- 设$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x) \in C[a,b]$, 则它们在$[a,b]$上线性无关的充要条件是$\det G_n \neq 0$, 其中

$$
\begin{aligned}
G_n = \ & G(\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n) \\
= & \begin{pmatrix}
(\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_n) \\
(\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_n) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
(\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_n)
\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

充分:

最佳平方逼近

- 设$\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)\in C[a,b]$, 则它们在$[a,b]$上线性无关的充要条件是$\det G_n\neq 0$, 其中

$$
\begin{aligned}
G_n &= G(\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n)\\
&= \begin{pmatrix}
(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n)\\
(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n)\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n)
\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

充分:

$$\sum_{i=0}^{n} c_i\varphi_i = 0$$

最佳平方逼近

- 设$\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)\in C[a,b]$, 则它们在$[a,b]$上线性无关的充要条件是$\det G_n\neq 0$, 其中

$$
\begin{aligned}
G_n = & \ G(\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n) \\
= & \begin{pmatrix}
(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n) \\
(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n)
\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

充分:

$$
\sum_{i=0}^{n} c_i\varphi_i = 0 \Rightarrow \left(\sum_{i=0}^{n} c_i\varphi_i,\varphi_j\right) = \sum_{i=0}^{n} c_i\left(\varphi_i,\varphi_j\right) = 0
$$

最佳平方逼近

- 设$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x) \in C[a,b]$, 则它们在$[a,b]$上线性无关的充要条件是$\det G_n \neq 0$, 其中

$$
\begin{aligned}
G_n = & \; G(\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n) \\
= & \begin{pmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_n) \\ (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_n) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

充分:

$$
\left(\sum_{i=0}^{n} c_i \varphi_i, \varphi_j \right) = \sum_{i=0}^{n} c_i \Big(\varphi_i, \varphi_j \Big) = 0 \Rightarrow c_i = 0
$$

最佳平方逼近

定义3.9 设$f(x) \in C[a,b]$, 如果存在$S^*(x) \in \Phi$, 使

$$\int_a^b \rho(x)[f(x)-S^*(x)]^2 \mathrm{d}x = \min_{S(x)\in\Phi} \int_a^b \rho(x)[f(x)-S(x)]^2 \mathrm{d}x$$

则称$S^*(x)$是$f(x)$在集合Φ中的最佳平方逼近函数。

最佳平方逼近

定义3.9 设$f(x) \in C[a,b]$, 如果存在$S^*(x) \in \Phi$, 使

$$\int_a^b \rho(x)[f(x) - S^*(x)]^2 \mathrm{d}x = \min_{S(x)\in\Phi} \int_a^b \rho(x)[f(x) - S(x)]^2 \mathrm{d}x$$

则称$S^*(x)$是$f(x)$在集合Φ中的最佳平方逼近函数。

若$\Phi = P_n$, 称$S^*(x)$是f的n次最佳平方逼近多项式。

最佳平方逼近

定义3.9 设$f(x) \in C[a,b]$, 如果存在$S^*(x) \in \Phi$, 使

$$\int_a^b \rho(x)[f(x)-S^*(x)]^2 \mathrm{d}x = \min_{S(x)\in\Phi} \int_a^b \rho(x)[f(x)-S(x)]^2 \mathrm{d}x$$

则称$S^*(x)$是$f(x)$在集合Φ中的最佳平方逼近函数。

若$\Phi = P_n$, 称$S^*(x)$是f的n次最佳平方逼近多项式。

定理3.5 设$f(x) \in C[a,b]$, 则$f(x)$在Φ中存在唯一的最佳平方逼近函数$S^*(x)$.

最佳平方逼近

定理3.5 设$f(x) \in C[a,b]$, 则$f(x)$在Φ中存在唯一的最佳平方逼近函数$S^*(x)$.

证明: 令$S(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x)$, 则

最佳平方逼近

定理3.5 设$f(x) \in C[a,b]$, 则$f(x)$在Φ中存在唯一的最佳平方逼近函数$S^*(x)$.

证明: 令$S(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x)$, 则

$$\int_a^b \rho(x)[f(x) - S(x)]^2 \mathrm{d}x = \int_a^b \rho(x)[f(x) - \sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x)]^2 \mathrm{d}x$$

最佳平方逼近

定理3.5 设$f(x) \in C[a,b]$, 则$f(x)$在Φ中存在唯一的最佳平方逼近函数$S^*(x)$.

证明: 令$S(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x)$, 则

$$\int_a^b \rho(x)[f(x) - S(x)]^2 \mathrm{d}x = \int_a^b \rho(x)[f(x) - \sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x)]^2 \mathrm{d}x$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_k} = -2\int_a^b \rho(x)[f(x) - \sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x)]\varphi_k(x)\mathrm{d}x = 0$$

最佳平方逼近

定理3.5 设$f(x)\in C[a,b]$, 则$f(x)$在Φ中存在唯一的最佳平方逼近函数$S^*(x)$.

证明: 令$S(x)=\sum_{j=0}^{n}a_j\varphi_j(x)$, 则

$$\int_a^b \rho(x)[f(x)-S(x)]^2\mathrm{d}x=\int_a^b \rho(x)[f(x)-\sum_{j=0}^{n}a_j\varphi_j(x)]^2\mathrm{d}x$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_k}=-2\int_a^b \rho(x)[f(x)-\sum_{j=0}^{n}a_j\varphi_j(x)]\varphi_k(x)\mathrm{d}x=0$$

$$\sum_{j=0}(\varphi_j,\varphi_k)a_j=(f,\varphi_k),\quad k=0,1,\cdots,n$$

称为法方程。因为$|G_n|\neq 0$, 此方程组有唯一解a_j^*.

最佳平方逼近

定理3.5 设$f(x) \in C[a,b]$, 则$f(x)$在Φ中存在唯一的最佳平方逼近函数$S^*(x)$.

证明: 令$S(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x)$, 则

$$\int_a^b \rho(x)[f(x) - S(x)]^2 \mathrm{d}x = \int_a^b \rho(x)[f(x) - \sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x)]^2 \mathrm{d}x$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_k} = -2\int_a^b \rho(x)[f(x) - \sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x)]\varphi_k(x)\mathrm{d}x = 0$$

这样得到的解$S^*(x)$满足

$$(f - S^*, \varphi_k) = 0$$

最佳平方逼近

定理3.5 设$f(x) \in C[a,b]$, 则$f(x)$在Φ中存在唯一的最佳平方逼近函数$S^*(x)$.

证明: 令$S(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x)$, 则

$$\int_a^b \rho(x)[f(x) - S(x)]^2 \mathrm{d}x = \int_a^b \rho(x)[f(x) - \sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x)]^2 \mathrm{d}x$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_k} = -2\int_a^b \rho(x)[f(x) - \sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x)]\varphi_k(x)\mathrm{d}x = 0$$

这样得到的解$S^*(x)$满足

$$(f - S^*, \varphi_k) = 0 \Rightarrow (f - S^*, S) = (f - S^*, S^* - S) = 0$$

最佳平方逼近

定理3.5 设$f(x)\in C[a,b]$, 则$f(x)$在Φ中存在唯一的最佳平方逼近函数$S^*(x)$.

证明: 这样得到的解$S^*(x)$满足

$$(f-S^*,\varphi_k)=0\Rightarrow(f-S^*,S)=(f-S^*,S^*-S)=0$$

$$\begin{aligned}
& (f-S,f-S)-(f-S^*,f-S^*) \\
= \quad & (S^*-S,2f-(S+S^*)) \\
= \quad & (S^*-S,S^*-S)+2(S^*-S,f-S^*) \\
= \quad & (S^*-S,S^*-S) \\
\geq \quad & 0.
\end{aligned}$$

最佳平方逼近: 例

区间$[0,1]$上的权为1的最佳平方逼近。

最佳平方逼近: 例

区间$[0,1]$上的权为1的最佳平方逼近。

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \int_0^1 x^j x^k \mathrm{d}x = \frac{1}{j+k+1}.$$

最佳平方逼近: 例

区间$[0,1]$上的权为1的最佳平方逼近。

$$(\varphi_j,\varphi_k)=\int_0^1 x^j x^k \mathrm{d}x=\frac{1}{j+k+1}.$$

希尔伯特(Hilbert)矩阵 MatLab命令hilb

最佳平方逼近: 例

例3.5 设$f(x)=\sqrt{1+x^2}$, 求$[0,1]$上的一次最佳平方逼近多项式$p_1^*(x)=a_0^*+a_1^*x$.

最佳平方逼近: 例

例3.5 设$f(x) = \sqrt{1+x^2}$, 求$[0,1]$上的一次最佳平方逼近多项式$p_1^*(x) = a_0^* + a_1^* x$.

解:

最佳平方逼近: 例

例3.5 设$f(x)=\sqrt{1+x^2}$, 求$[0,1]$上的一次最佳平方逼近多项式$p_1^*(x)=a_0^*+a_1^*x$.

解:

$$d_0=\int_0^1\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x=\tfrac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})+\tfrac{\sqrt{2}}{2}\approx 1.147$$

$$d_1=\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x=\tfrac{2\sqrt{2}-1}{3}\approx 0.609$$

最佳平方逼近: 例

例3.5 设$f(x)=\sqrt{1+x^2}$, 求$[0,1]$上的一次最佳平方逼近多项式$p_1^*(x)=a_0^*+a_1^*x$.

解:

$$d_0=\int_0^1\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x=\tfrac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})+\tfrac{\sqrt{2}}{2}\approx 1.147$$
$$d_1=\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x=\tfrac{2\sqrt{2}-1}{3}\approx 0.609$$

法方程为

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1.147 \\ 0.609 \end{pmatrix}$$

最佳平方逼近: 例

例3.5 设$f(x)=\sqrt{1+x^2}$, 求$[0,1]$上的一次最佳平方逼近多项式$p_1^*(x)=a_0^*+a_1^*x$.

解:

$$d_0=\int_0^1\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x=\tfrac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})+\tfrac{\sqrt{2}}{2}\approx 1.147$$
$$d_1=\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x=\tfrac{2\sqrt{2}-1}{3}\approx 0.609$$

法方程为

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1.147 \\ 0.609 \end{pmatrix}$$

解得$a_0^*=0.934$, $a_1^*=0.426$. 因此$p_1^*(x)=0.934+0.426x$.

最佳平方逼近: 正交

若$\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n$是$[a, b]$上的带权$\rho(x)$的正交函数,

$$f(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_k\varphi_k(x) + \cdots$$

最佳平方逼近: 正交

若$\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n$是$[a, b]$上的带权$\rho(x)$的正交函数,

$$f(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_k\varphi_k(x) + \cdots$$

两边乘以$\varphi_k(x)\rho(x)$, 并在$[a, b]$上积分,

最佳平方逼近: 正交

若$\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n$是$[a,b]$上的带权$\rho(x)$的正交函数,

$$f(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_k\varphi_k(x) + \cdots$$

两边乘以$\varphi_k(x)\rho(x)$, 并在$[a,b]$上积分,

$$(\varphi_k, f) = a_k(\varphi_k, \varphi_k)$$

最佳平方逼近: 正交

若$\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n$是$[a,b]$上的带权$\rho(x)$的正交函数,

$$f(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_k\varphi_k(x) + \cdots$$

两边乘以$\varphi_k(x)\rho(x)$, 并在$[a,b]$上积分,

$$(\varphi_k, f) = a_k(\varphi_k, \varphi_k)$$

$$a_k = \frac{(\varphi_k, f)}{(\varphi_k, \varphi_k)}$$

最佳平方逼近: 正交

若$\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n$是$[a, b]$上的带权$\rho(x)$的正交函数,

$$f(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_k\varphi_k(x) + \cdots$$

两边乘以$\varphi_k(x)\rho(x)$, 并在$[a, b]$上积分,

$$(\varphi_k, f) = a_k(\varphi_k, \varphi_k)$$

$$a_k = \frac{(\varphi_k, f)}{(\varphi_k, \varphi_k)}$$

广义傅里叶(Fourier)展开

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\varphi_k, f)}{(\varphi_k, \varphi_k)} \varphi_k(x)$$

最佳平方逼近: 例

例3.6 用Legend正交多项式求$f(x) = \mathrm{e}^x$在$[-1, 1]$上的最佳平方逼近多项式(取$n = 1, 3$).

最佳平方逼近: 例

例3.6 用Legend正交多项式求$f(x) = \mathrm{e}^x$在$[-1, 1]$上的最佳平方逼近多项式(取$n = 1, 3$).

解:

最佳平方逼近: 例

例3.6 用Legend正交多项式求$f(x)=\mathrm{e}^x$在$[-1,1]$上的最佳平方逼近多项式(取$n=1,3$).

解: 先计算

$$
\begin{aligned}
(f,P_0)&=\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}\approx 2.3504\\
(f,P_1)&=\int_{-1}^{1}x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=2\mathrm{e}^{-1}\approx 0.7358\\
(f,P_2)&=\int_{-1}^{1}(\tfrac{3}{2}x^2-\tfrac{1}{2})\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}-7\mathrm{e}^{-1}\approx 0.1431\\
(f,P_3)&=\int_{-1}^{1}(\tfrac{5}{2}x^3-\tfrac{3}{2}x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=37\mathrm{e}^{-1}-5\mathrm{e}\approx 0.02013
\end{aligned}
$$

最佳平方逼近: 例

例3.6 用Legend正交多项式求$f(x)=\mathrm{e}^x$在$[-1,1]$上的最佳平方逼近多项式(取$n=1,3$).

解: 先计算

$$(f,P_0)=\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}\approx 2.3504$$

$$(f,P_1)=\int_{-1}^{1}x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=2\mathrm{e}^{-1}\approx 0.7358$$

$$(f,P_2)=\int_{-1}^{1}(\tfrac{3}{2}x^2-\tfrac{1}{2})\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}-7\mathrm{e}^{-1}\approx 0.1431$$

$$(f,P_3)=\int_{-1}^{1}(\tfrac{5}{2}x^3-\tfrac{3}{2}x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=37\mathrm{e}^{-1}-5\mathrm{e}\approx 0.02013$$

因此, $a_0^*=1.1752$, $a_1^*=1.1036$, $a_2^*=0.3578$, $a_3^*=0.07046$.

最佳平方逼近: 例

例3.6 用Legend正交多项式求$f(x) = \mathrm{e}^x$在$[-1, 1]$上的最佳平方逼近多项式(取$n = 1, 3$).

解: 因此, $a_0^* = 1.1752$, $a_1^* = 1.1036$, $a_2^* = 0.3578$, $a_3^* = 0.07046$.

$$s_1^*(x) = a_0^* P_0(x) + a_1^* P_1(x) = 1.1752 + 1.1036x$$

$$s_2^*(x) = \sum_{j=0}^{3} a_j^* P_j(x) = 0.9963 + 0.9979x + 0.5367x^2 + 0.1761x^3$$

最佳平方逼近: 例

例3.6 用Legend正交多项式求$f(x) = \mathrm{e}^x$在$[-1, 1]$上的最佳平方逼近多项式(取$n = 1, 3$).

解: 因此, $a_0^* = 1.1752$, $a_1^* = 1.1036$, $a_2^* = 0.3578$, $a_3^* = 0.07046$.

$$s_1^*(x) = a_0^* P_0(x) + a_1^* P_1(x) = 1.1752 + 1.1036x$$

$$s_2^*(x) = \sum_{j=0}^{3} a_j^* P_j(x) = 0.9963 + 0.9979x + 0.5367x^2 + 0.1761x^3$$

比较Taylor展开

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots$$

最佳平方逼近: 例

例3.7 求函数$f(x)=\sqrt{1+x^2}$在$[0,1]$上的一次最佳平方逼近多项式。

最佳平方逼近: 例

例3.7 求函数$f(x) = \sqrt{1+x^2}$在$[0,1]$上的一次最佳平方逼近多项式。

解:

最佳平方逼近: 例

例3.7 求函数$f(x) = \sqrt{1+x^2}$在$[0,1]$上的一次最佳平方逼近多项式。

解: 先作变换$x = \frac{1}{2}(1+t)$,

最佳平方逼近: 例

例3.7 求函数$f(x)=\sqrt{1+x^2}$在$[0,1]$上的一次最佳平方逼近多项式。

解: 先作变换$x=\frac{1}{2}(1+t)$, 则$f(x)=\sqrt{1+\frac{1}{4}(1+t)^2}=g(t)$, $-1\le t\le 1$.

最佳平方逼近: 例

例3.7 求函数$f(x)=\sqrt{1+x^2}$在$[0,1]$上的一次最佳平方逼近多项式。

解: 先作变换$x=\frac{1}{2}(1+t)$, 则$f(x)=\sqrt{1+\frac{1}{4}(1+t)^2}=g(t)$, $-1\le t\le 1$. 求$g(t)$在$[-1,1]$上的一次最佳平方逼近多项式$q_1(t)$:

最佳平方逼近: 例

例3.7 求函数$f(x)=\sqrt{1+x^2}$在$[0,1]$上的一次最佳平方逼近多项式。

解: 先作变换$x=\frac{1}{2}(1+t)$, 则$f(x)=\sqrt{1+\frac{1}{4}(1+t)^2}=g(t)$, $-1\le t\le 1$. 求$g(t)$在$[-1,1]$上的一次最佳平方逼近多项式$q_1(t)$:

$$a_0=\frac{1}{2}(g,P_0)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{1+\frac{1}{4}(1+t)^2}\mathrm{d}t\approx 1.1478$$
$$a_0=\frac{3}{2}(g,P_1)=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}t\sqrt{1+\frac{1}{4}(1+t)^2}\mathrm{d}t\approx 0.2134$$

最佳平方逼近: 例

例3.7 求函数$f(x)=\sqrt{1+x^2}$在$[0,1]$上的一次最佳平方逼近多项式。

解: 先作变换$x=\frac{1}{2}(1+t)$, 则$f(x)=\sqrt{1+\frac{1}{4}(1+t)^2}=g(t)$, $-1\leq t\leq 1$. 求$g(t)$在$[-1,1]$上的一次最佳平方逼近多项式$q_1(t)$:

$$a_0=\frac{1}{2}(g,P_0)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{1+\frac{1}{4}(1+t)^2}\mathrm{d}t\approx 1.1478$$
$$a_0=\frac{3}{2}(g,P_1)=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}t\sqrt{1+\frac{1}{4}(1+t)^2}\mathrm{d}t\approx 0.2134$$

$$q_1(t)=1.1478+0.2134t=0.9344+0.4268x=s(x).$$

最佳平方逼近: 例

例3.7 求函数$f(x)=\sqrt{1+x^2}$在$[0,1]$上的一次最佳平方逼近多项式。

解: 先作变换$x=\frac{1}{2}(1+t)$, 则$f(x)=\sqrt{1+\frac{1}{4}(1+t)^2}=g(t)$, $-1\le t\le 1$. 求$g(t)$在$[-1,1]$上的一次最佳平方逼近多项式$q_1(t)$:

$$a_0=\frac{1}{2}(g,P_0)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{1+\frac{1}{4}(1+t)^2}\mathrm{d}t\approx 1.1478$$

$$a_0=\frac{3}{2}(g,P_1)=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}t\sqrt{1+\frac{1}{4}(1+t)^2}\mathrm{d}t\approx 0.2134$$

$$q_1(t)=1.1478+0.2134t=0.9344+0.4268x=s(x).$$

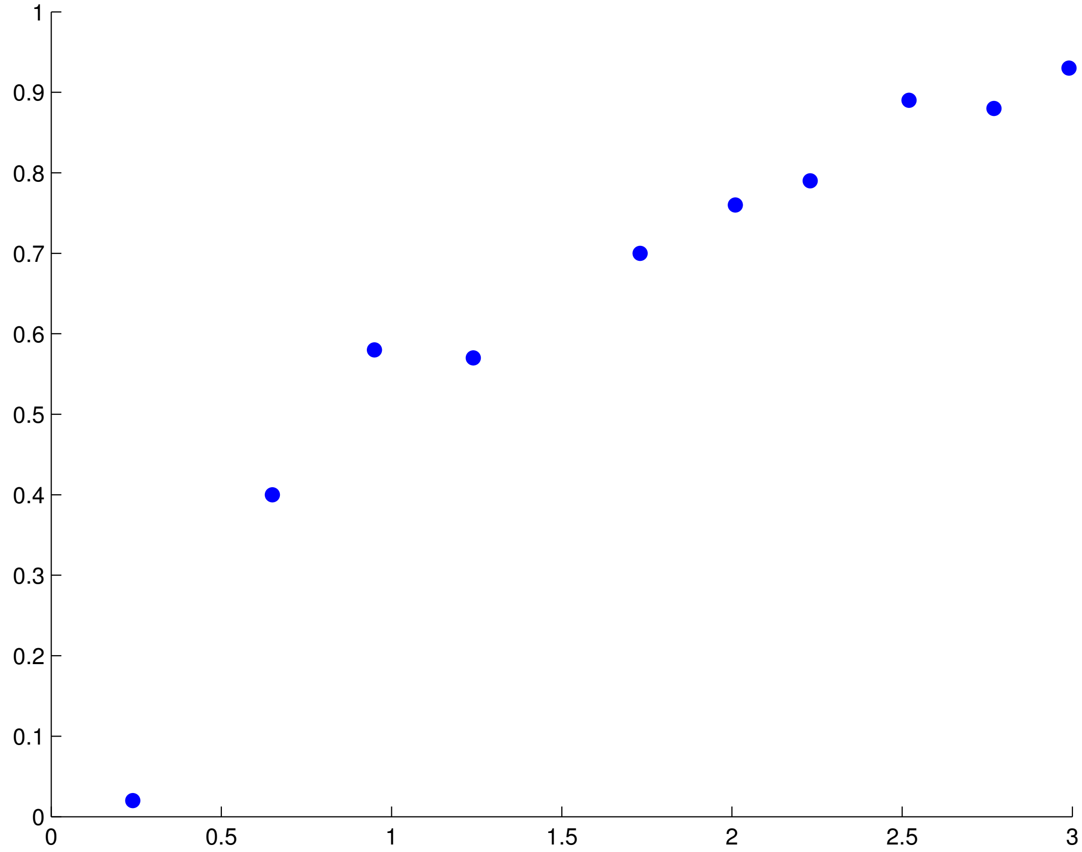
比较例3.5的结果。

曲线拟合的最小二乘法

几何意义(nademo5)

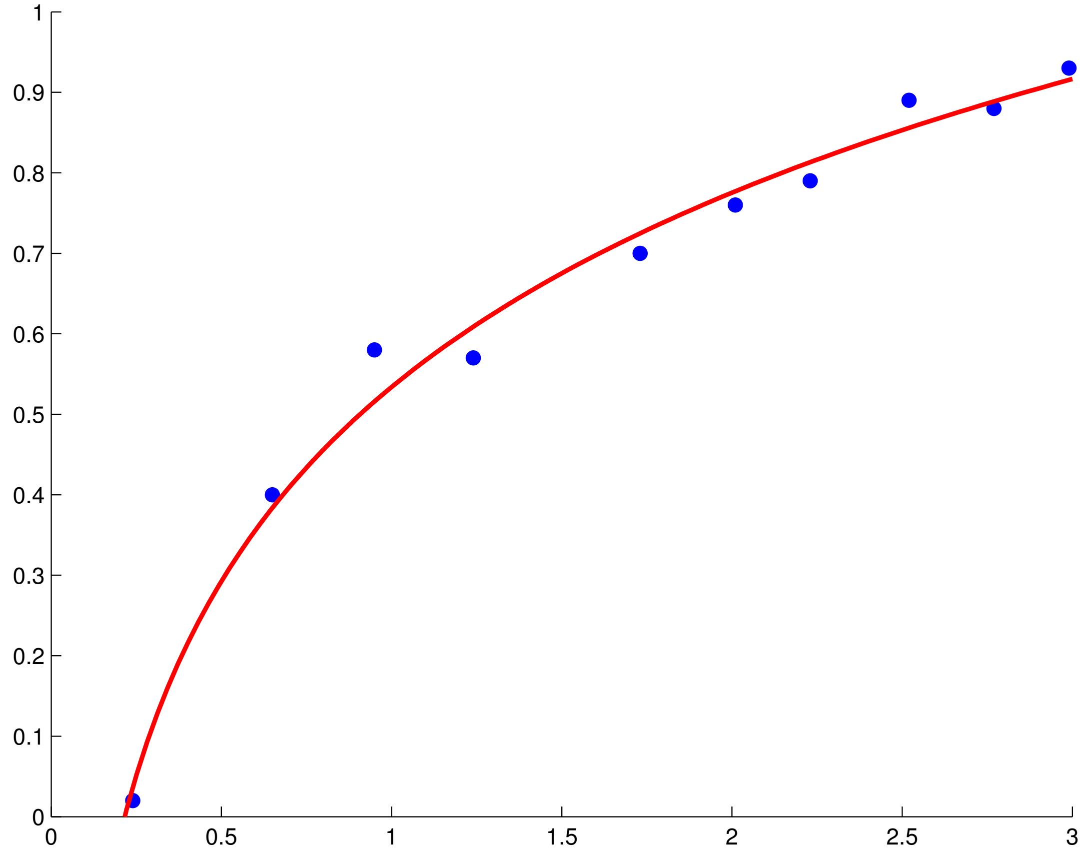
曲线拟合的最小二乘法

几何意义(nademo5)



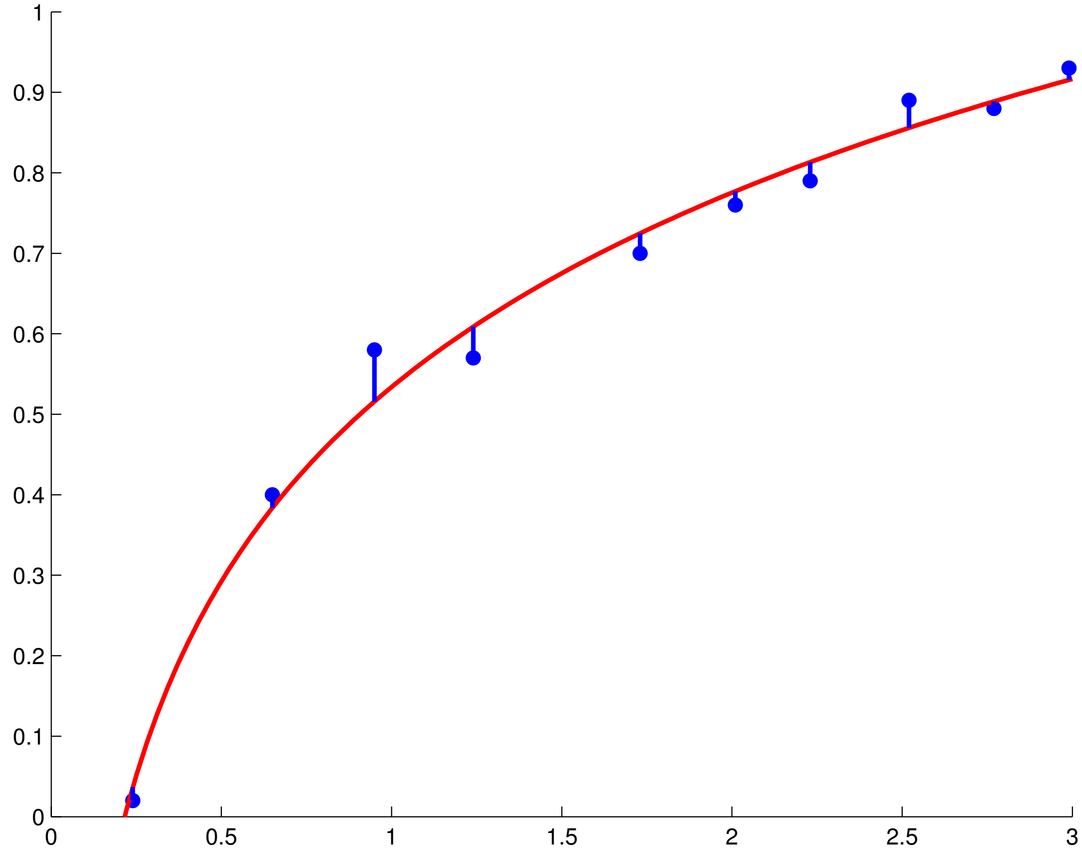
曲线拟合的最小二乘法

几何意义(nademo5)



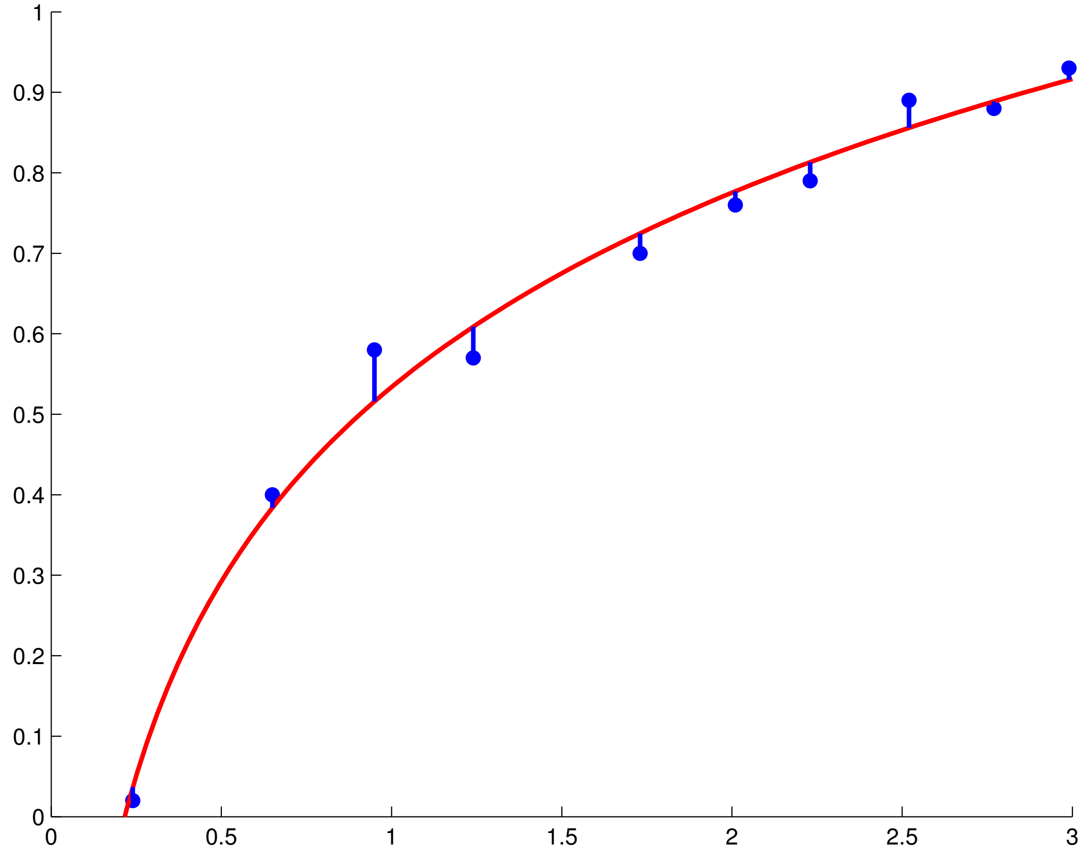
曲线拟合的最小二乘法

几何意义(nademo5)



曲线拟合的最小二乘法

几何意义(nademo5)



$$\min_{S(x)} \sum_{i=0}^{m} \omega_i \Big(S(x_i) - f(x_i) \Big)^2$$

曲线拟合的最小二乘法

令$S(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x)$,

曲线拟合的最小二乘法

令$S(x)=\sum_{j=0}^{n} a_j\varphi_j(x)$,

$$\min_{a_j} I=\sum_{i=0}^{m}\omega_i\left[\sum_{j=0}^{n} a_j\varphi_j(x_i)-f(x_i)\right]^2$$

曲线拟合的最小二乘法

令$S(x)=\sum_{j=0}^{n} a_j\varphi_j(x)$,

$$\min_{a_j} I=\sum_{i=0}^{m}\omega_i\left[\sum_{j=0}^{n} a_j\varphi_j(x_i)-f(x_i)\right]^2$$

可得到法方程

$$\sum_{j=0}^{n}(\varphi_j,\varphi_k)a_j=(f,\varphi_k),\quad k=0,1,\cdots,n$$

曲线拟合的最小二乘法

令$S(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x)$,

$$\min_{a_j} I = \sum_{i=0}^{m} \omega_i \left[\sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x_i) - f(x_i) \right]^2$$

可得到法方程

$$\sum_{j=0}^{n} (\varphi_j, \varphi_k) a_j = (f, \varphi_k), \quad k = 0, 1, \cdots, n$$

其中, $(f, g) = \sum_{i=0}^{m} \omega_i f(x_i) g(x_i)$.

曲线拟合的最小二乘法

例3.8 给定数据$(x_i, y_i), i = 0, \cdots, 9$如下表。试选择适当模型, 求最小二乘拟合函数。

x_i	0.24	0.65	0.95	1.24	1.73	2.01	2.23	2.52	2.77	2.99
y_i	0.23	-0.26	-1.10	-0.45	0.27	0.10	-0.29	0.24	0.56	1.00

曲线拟合的最小二乘法

例3.8 给定数据(x_i, y_i), $i = 0, \cdots, 9$如下表。试选择适当模型, 求最小二乘拟合函数。

x_i	0.24	0.65	0.95	1.24	1.73	2.01	2.23	2.52	2.77	2.99
y_i	0.23	−0.26	−1.10	−0.45	0.27	0.10	−0.29	0.24	0.56	1.00

解:

曲线拟合的最小二乘法

例3.8 给定数据$(x_i, y_i), i = 0, \cdots, 9$如下表。试选择适当模型，求最小二乘拟合函数。

x_i	0.24	0.65	0.95	1.24	1.73	2.01	2.23	2.52	2.77	2.99
y_i	0.23	−0.26	−1.10	−0.45	0.27	0.10	−0.29	0.24	0.56	1.00

解:　采用拟合函数$S(x) = a\ln x + b\cos x + ce^x$,

曲线拟合的最小二乘法

例3.8 给定数据$(x_i, y_i), i = 0, \cdots, 9$如下表。试选择适当模型, 求最小二乘拟合函数。

x_i	0.24	0.65	0.95	1.24	1.73	2.01	2.23	2.52	2.77	2.99
y_i	0.23	−0.26	−1.10	−0.45	0.27	0.10	−0.29	0.24	0.56	1.00

解: 采用拟合函数$S(x) = a\ln x + b\cos x + c\mathrm{e}^x$, 基函数为 $\varphi_0 = \ln x, \varphi_1 = \cos x, \varphi_2 = \mathrm{e}^x$.

曲线拟合的最小二乘法

例3.8 给定数据$(x_i, y_i), i = 0, \cdots, 9$如下表。试选择适当模型, 求最小二乘拟合函数。

x_i	0.24	0.65	0.95	1.24	1.73	2.01	2.23	2.52	2.77	2.99
y_i	0.23	−0.26	−1.10	−0.45	0.27	0.10	−0.29	0.24	0.56	1.00

解: 采用拟合函数$S(x) = a\ln x + b\cos x + ce^x$, 法方程如下:

$$\begin{bmatrix} 6.7941 & -5.3475 & 63.259 \\ -5.3475 & 5.1084 & -49.009 \\ 63.259 & -49.009 & 1002.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.6163 \\ -2.3827 \\ 26.773 \end{bmatrix}$$

曲线拟合的最小二乘法

例3.8 给定数据$(x_i, y_i), i = 0, \cdots, 9$如下表。试选择适当模型, 求最小二乘拟合函数。

x_i	0.24	0.65	0.95	1.24	1.73	2.01	2.23	2.52	2.77	2.99
y_i	0.23	−0.26	−1.10	−0.45	0.27	0.10	−0.29	0.24	0.56	1.00

解: 采用拟合函数$S(x) = a\ln x + b\cos x + ce^x$, 法方程如下:

$$\begin{bmatrix} 6.7941 & -5.3475 & 63.259 \\ -5.3475 & 5.1084 & -49.009 \\ 63.259 & -49.009 & 1002.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.6163 \\ -2.3827 \\ 26.773 \end{bmatrix}$$

解得$a = -1.0410, b = -1.2613, c = 0.03073,$

曲线拟合的最小二乘法

例3.8 给定数据$(x_i, y_i), i = 0, \cdots, 9$如下表。试选择适当模型, 求最小二乘拟合函数。

x_i	0.24	0.65	0.95	1.24	1.73	2.01	2.23	2.52	2.77	2.99
y_i	0.23	−0.26	−1.10	−0.45	0.27	0.10	−0.29	0.24	0.56	1.00

解: 采用拟合函数$S(x) = a\ln x + b\cos x + ce^x$, 法方程如下:

$$\begin{bmatrix} 6.7941 & -5.3475 & 63.259 \\ -5.3475 & 5.1084 & -49.009 \\ 63.259 & -49.009 & 1002.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.6163 \\ -2.3827 \\ 26.773 \end{bmatrix}$$

解得$a = -1.0410, b = -1.2613, c = 0.03073$, 因此,

$S(x) = -1.0410\ln x - 1.2613\cos x + 0.03073e^x$.

曲线拟合的最小二乘法

例3.8 给定数据$(x_i, y_i), i = 0, \cdots, 9$如下表。试选择适当模型，求最小二乘拟合函数。

x_i	0.24	0.65	0.95	1.24	1.73	2.01	2.23	2.52	2.77	2.99
y_i	0.23	-0.26	-1.10	-0.45	0.27	0.10	-0.29	0.24	0.56	1.00

解: 用MatLab求解

曲线拟合的最小二乘法

例3.8 给定数据(x_i, y_i), $i = 0, \cdots, 9$如下表。试选择适当模型，求最小二乘拟合函数。

x_i	0.24	0.65	0.95	1.24	1.73	2.01	2.23	2.52	2.77	2.99
y_i	0.23	−0.26	−1.10	−0.45	0.27	0.10	−0.29	0.24	0.56	1.00

解: 用MatLab求解

```
x = [0.24  0.65  0.95  1.24 1.73 2.01  2.23 ...
           2.52 2.77 2.99]';
y = [0.23 -0.26 -1.10 -0.45 0.27 0.10 -0.29 ...
           0.24 0.56 1.00]';
A = [log(x) cos(x) exp(x)];
Z = A\y;
a = Z(1); b = Z(2); c = Z(3);
```

多项式拟合

$$\{\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n\} = \{1, x, \cdots, x^n\}$$

多项式拟合

$$\{\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n\} = \{1, x, \cdots, x^n\}$$

若拟合函数为$S(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, 法方程为

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{m} \omega_i & \sum_{i=0}^{m} \omega_i x_i & \cdots & \sum_{i=0}^{m} \omega_i x_i^n \\ \sum_{i=0}^{m} \omega_i x_i & \sum_{i=0}^{m} \omega_i x_i^2 & \cdots & \sum_{i=0}^{m} \omega_i x_i^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{m} \omega_i x_n & \sum_{i=0}^{m} \omega_i x_i^{n+1} & \cdots & \sum_{i=0}^{m} \omega_i x_i^{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{m} \omega_i f_i \\ \sum_{i=0}^{m} \omega_i x_i f_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{m} \omega_i x_i^n f_i \end{bmatrix}$$

多项式拟合

例3.9 求数据表

x_i	0	0.25	0.50	0.75	1.00
y_i	1.0000	1.2840	1.6487	2.1170	2.7183

的二次最小二乘拟合多项式。

多项式拟合

例3.9 求数据表

x_i	0	0.25	0.50	0.75	1.00
y_i	1.0000	1.2840	1.6487	2.1170	2.7183

的二次最小二乘拟合多项式。

解:

多项式拟合

例3.9 求数据表

x_i	0	0.25	0.50	0.75	1.00
y_i	1.0000	1.2840	1.6487	2.1170	2.7183

的二次最小二乘拟合多项式。

解: 设二次拟合多项式为$p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, 则法方程为

多项式拟合

例3.9 求数据表

x_i	0	0.25	0.50	0.75	1.00
y_i	1.0000	1.2840	1.6487	2.1170	2.7183

的二次最小二乘拟合多项式。

解: 设二次拟合多项式为$p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, 则法方程为

$$\begin{cases} 5a_0 + 2.5a_1 + 1.875a_2 = 8.7680 \\ 2.5a_0 + 1.875a_1 + 1.5625a_2 = 5.4514 \\ 1.875a_0 + 1.5625a_1 + 1.3828a_2 = 4.4015 \end{cases}$$

多项式拟合

例3.9 求数据表

x_i	0	0.25	0.50	0.75	1.00
y_i	1.0000	1.2840	1.6487	2.1170	2.7183

的二次最小二乘拟合多项式。

解: 设二次拟合多项式为$p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, 则法方程为

$$\begin{cases} 5a_0 + 2.5a_1 + 1.875a_2 = 8.7680 \\ 2.5a_0 + 1.875a_1 + 1.5625a_2 = 5.4514 \\ 1.875a_0 + 1.5625a_1 + 1.3828a_2 = 4.4015 \end{cases}$$

解得$a_0 = 1.0052, a_1 = 0.8641, a_2 = 0.8437,$

多项式拟合

例3.9 求数据表

x_i	0	0.25	0.50	0.75	1.00
y_i	1.0000	1.2840	1.6487	2.1170	2.7183

的二次最小二乘拟合多项式。

解: 设二次拟合多项式为$p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, 则法方程为

$$\begin{cases} 5a_0 + 2.5a_1 + 1.875a_2 = 8.7680 \\ 2.5a_0 + 1.875a_1 + 1.5625a_2 = 5.4514 \\ 1.875a_0 + 1.5625a_1 + 1.3828a_2 = 4.4015 \end{cases}$$

解得$a_0 = 1.0052, a_1 = 0.8641, a_2 = 0.8437,$

即$p_2(x) = 1.0052 + 0.8641x + 0.8437x^2.$

多项式拟合

例3.9 求数据表

x_i	0	0.25	0.50	0.75	1.00
y_i	1.0000	1.2840	1.6487	2.1170	2.7183

的二次最小二乘拟合多项式。

解:　用MatLab求解

多项式拟合

例3.9 求数据表

x_i	0	0.25	0.50	0.75	1.00
y_i	1.0000	1.2840	1.6487	2.1170	2.7183

的二次最小二乘拟合多项式。

解: 用**MatLab**求解

```
x = [0:0.25:1]';
y = [1.00 1.284 1.6487 2.1170 2.7183]';
A = [ones(size(x)) x x.^2];
Z = A\y;
```

多项式拟合

例3.9 求数据表

x_i	0	0.25	0.50	0.75	1.00
y_i	1.0000	1.2840	1.6487	2.1170	2.7183

的二次最小二乘拟合多项式。

解: 用**MatLab**求解

```
x = [0:0.25:1]';
y = [1.00 1.284 1.6487 2.1170 2.7183]';
A = [ones(size(x)) x x.^2];
Z = A\y;
```

或

多项式拟合

例3.9 求数据表

x_i	0	0.25	0.50	0.75	1.00
y_i	1.0000	1.2840	1.6487	2.1170	2.7183

的二次最小二乘拟合多项式。

解: 用**MatLab**求解

```
x = [0:0.25:1]';
y = [1.00 1.284 1.6487 2.1170 2.7183]';
A = [ones(size(x)) x x.^2];
Z = A\y;
```

或

```
x = [0:0.25:1]';
y = [1.00 1.284 1.6487 2.1170 2.7183]';
p = polyfit(x,y,2);
```

利用正交多项式作最小二乘拟合

定义3.10 设给定点集$\{x_i\}_{i=0}^m$以及各点的权系数$\{\omega_i\}_{i=0}^m$, 如果多项式族$\{P_k(x)\}_{k=0}^n$满足

$$(P_k, P_j) = \sum_{i=0}^{m} \omega_i P_k(x_i) P_j(x_i) = \begin{cases} 0, & (j \neq k), \\ A_k > 0, & (j = k), \end{cases}$$

则称$\{P_k(x)\}_{k=0}^n$为关于点集$\{x_i\}_{i=0}^m$的带权$\{\omega_i\}_{i=0}^m$的正交多项式族。

利用正交多项式作最小二乘拟合

定义3.10 设给定点集$\{x_i\}_{i=0}^m$以及各点的权系数$\{\omega_i\}_{i=0}^m$, 如果多项式族$\{P_k(x)\}_{k=0}^n$满足

$$(P_k, P_j) = \sum_{i=0}^{m} \omega_i P_k(x_i) P_j(x_i) = \begin{cases} 0, & (j \neq k), \\ A_k > 0, & (j = k), \end{cases}$$

则称$\{P_k(x)\}_{k=0}^n$为关于点集$\{x_i\}_{i=0}^m$的带权$\{\omega_i\}_{i=0}^m$的正交多项式族。 递推公式如下

$$\begin{cases} P_0(x) = 1, \\ P_1(x) = x - \alpha_0, \\ P_{k+1}(x) = (x - \alpha_k) P_k(x) - \beta_{k-1} P_{k-1}(x), \end{cases}$$

利用正交多项式作最小二乘拟合

定义3.10 设给定点集$\{x_i\}_{i=0}^m$以及各点的权系数$\{\omega_i\}_{i=0}^m$, 如果多项式族$\{P_k(x)\}_{k=0}^n$满足

$$(P_k, P_j) = \sum_{i=0}^{m} \omega_i P_k(x_i) P_j(x_i) = \begin{cases} 0, & (j \neq k), \\ A_k > 0, & (j = k), \end{cases}$$

则称$\{P_k(x)\}_{k=0}^n$为关于点集$\{x_i\}_{i=0}^m$的带权$\{\omega_i\}_{i=0}^m$的正交多项式族。 递推公式如下

$$\begin{cases} P_0(x)=1, \\ P_1(x)=x-\alpha_0, \\ P_{k+1}(x)=(x-\alpha_k)P_k(x)-\beta_{k-1}P_{k-1}(x), \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_k = \frac{(xP_k, P_k)}{(P_k, P_k)}, \\ \quad k = 0, \cdots, n, \\ \beta_k = \frac{(P_k, P_k)}{(P_{k-1}, P_{k-1})}, \\ \quad k = 1, \cdots, n. \end{cases}$$

利用正交多项式作最小二乘拟合

定义3.10 设给定点集$\{x_i\}_{i=0}^m$以及各点的权系数$\{\omega_i\}_{i=0}^m$, 如果多项式族$\{P_k(x)\}_{k=0}^n$满足

$$(P_k, P_j) = \sum_{i=0}^{m} \omega_i P_k(x_i) P_j(x_i) = \begin{cases} 0, & (j \neq k), \\ A_k > 0, & (j = k), \end{cases}$$

则称$\{P_k(x)\}_{k=0}^n$为关于点集$\{x_i\}_{i=0}^m$的带权$\{\omega_i\}_{i=0}^m$的正交多项式族。

正交多项式得到后, 法方程为

$$(P_k, P_k) a_k = (f, P_k), \quad k = 0, 1, \cdots, n.$$

非线性最小二乘拟合

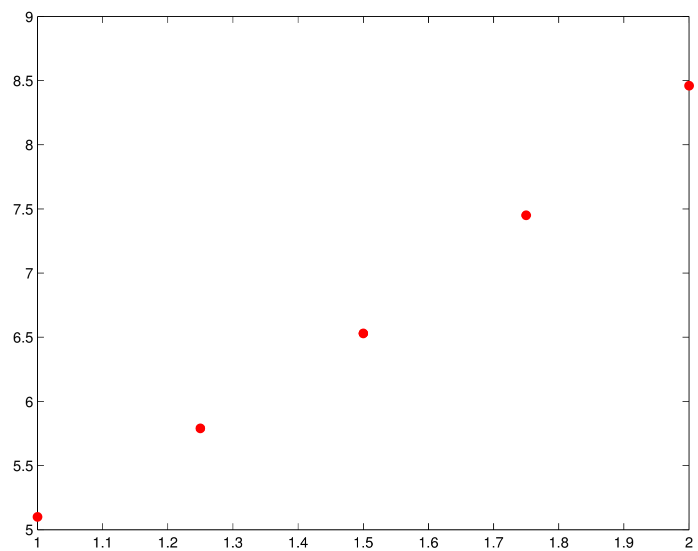
例3.11 拟合下面给定的数据(x_i, f_i)

x_i	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
f_i	5.10	5.79	6.53	7.45	8.46

非线性最小二乘拟合

例3.11 拟合下面给定的数据(x_i, f_i)

x_i	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
f_i	5.10	5.79	6.53	7.45	8.46

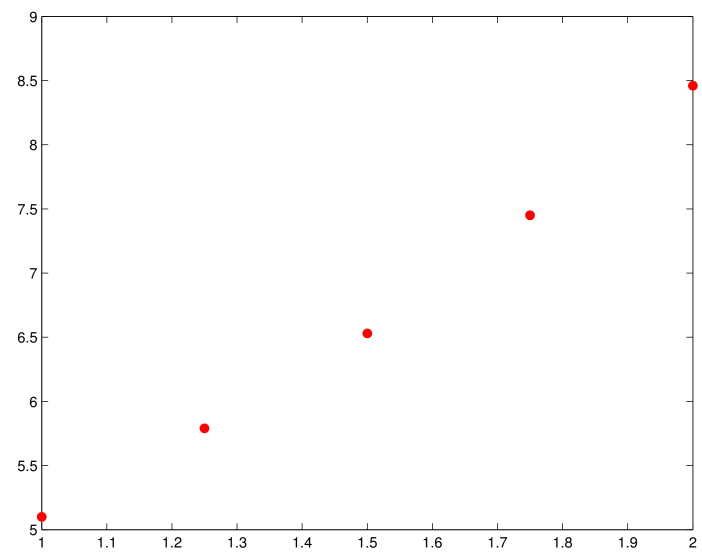


非线性最小二乘拟合

例3.11 拟合下面给定的数据(x_i, f_i)

x_i	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
f_i	5.10	5.79	6.53	7.45	8.46

模型　$y = ae^{bx}$



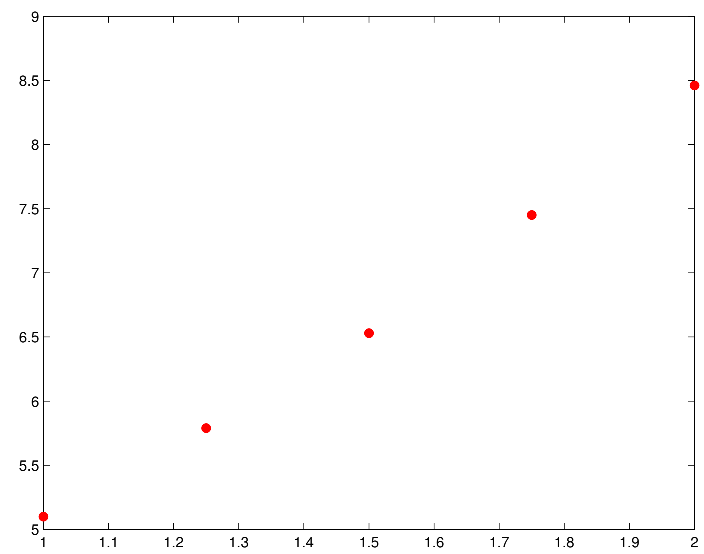
非线性最小二乘拟合

例3.11 拟合下面给定的数据(x_i, f_i)

x_i	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
f_i	5.10	5.79	6.53	7.45	8.46

模型 $y = a\mathrm{e}^{bx}$

变换 $\ln y = \ln a + bx$



非线性最小二乘拟合

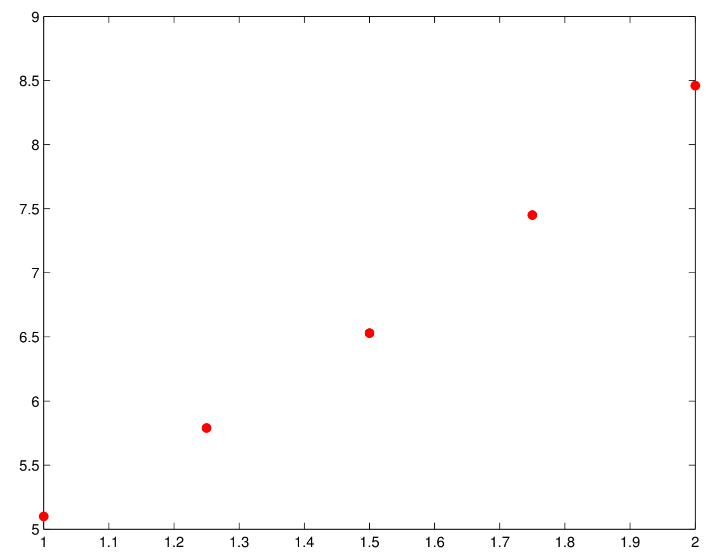
例3.11 拟合下面给定的数据(x_i, f_i)

x_i	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
f_i	5.10	5.79	6.53	7.45	8.46

模型 $$y = a\mathrm{e}^{bx}$$

变换 $$\ln y = \ln a + bx$$

$$u = A + bx$$



非线性最小二乘拟合

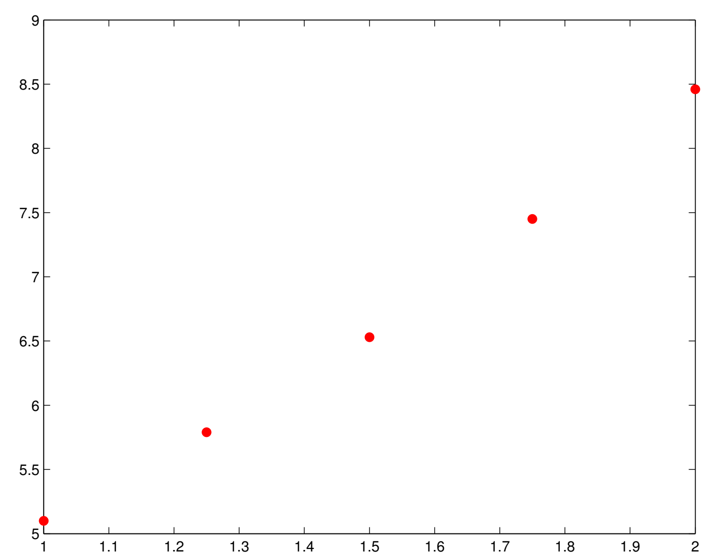
例3.11 拟合下面给定的数据(x_i, f_i)

x_i	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
f_i	5.10	5.79	6.53	7.45	8.46
u_i	1.63	1.76	1.88	2.01	2.14

模型 $y = a\mathrm{e}^{bx}$

变换 $\ln y = \ln a + bx$

$u = A + bx$



非线性最小二乘拟合

例3.11 拟合下面给定的数据(x_i, f_i)

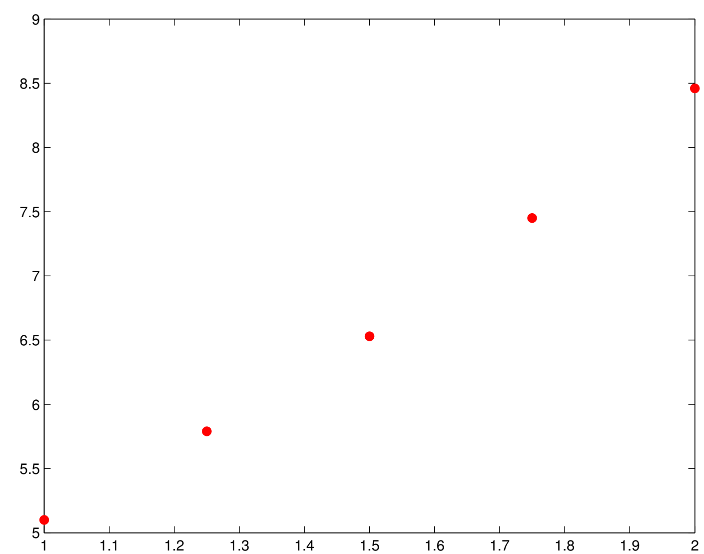
x_i	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
f_i	5.10	5.79	6.53	7.45	8.46
u_i	1.63	1.76	1.88	2.01	2.14

模型 $$y = a\mathrm{e}^{bx}$$

变换 $$\ln y = \ln a + bx$$

$$u = A + bx$$

法方程 $$\begin{cases} 5A + 7.50b = 9.404 \\ 7.50A + 11.875b = 14.422 \end{cases}$$



非线性最小二乘拟合

例3.11 拟合下面给定的数据(x_i, f_i)

x_i	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
f_i	5.10	5.79	6.53	7.45	8.46
u_i	1.63	1.76	1.88	2.01	2.14

模型 $$y = ae^{bx}$$

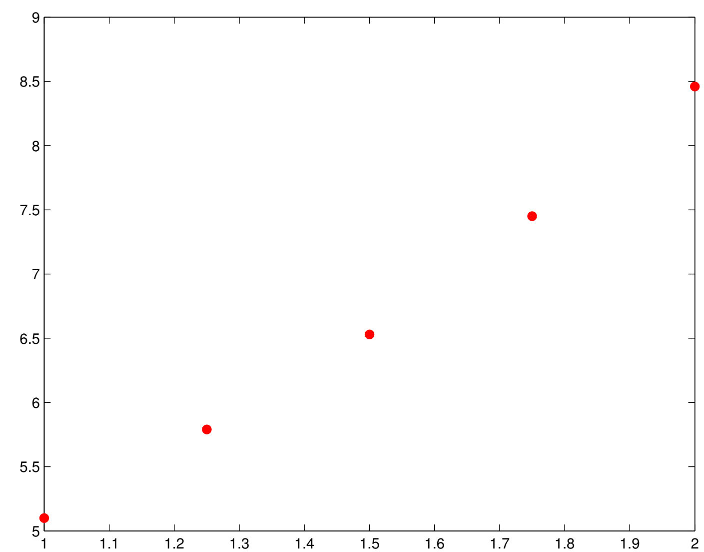
变换 $$\ln y = \ln a + bx$$

$$u = A + bx$$

法方程 $$\begin{cases} 5A + 7.50b = 9.404 \\ 7.50A + 11.875b = 14.422 \end{cases}$$

求解 $$A = 1.122,\ b = 0.5056;$$

$$a = e^A = 3.071$$



非线性最小二乘拟合

例3.11 拟合下面给定的数据(x_i, f_i)

x_i	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
f_i	5.10	5.79	6.53	7.45	8.46
u_i	1.63	1.76	1.88	2.01	2.14

模型 $$y = a\mathrm{e}^{bx}$$

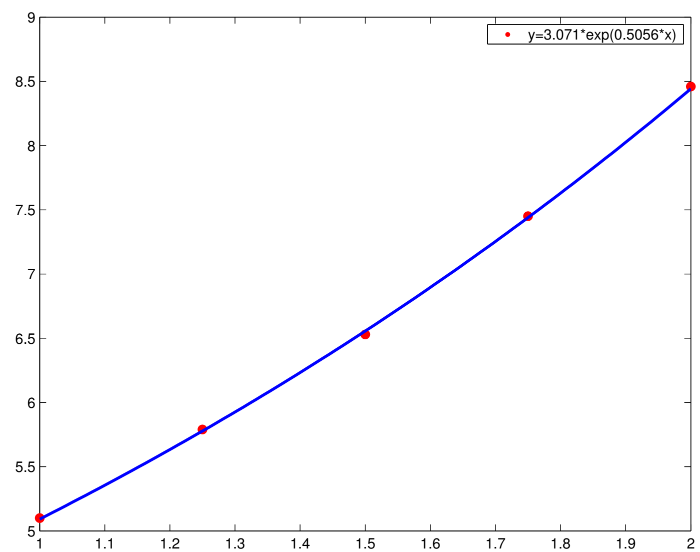
变换 $$\ln y = \ln a + bx$$

$$u = A + bx$$

法方程 $$\begin{cases} 5A + 7.50b = 9.404 \\ 7.50A + 11.875b = 14.422 \end{cases}$$

求解 $$A = 1.122,\ b = 0.5056;$$

$$a = \mathrm{e}^{A} = 3.071$$



非线性最小二乘拟合

例3.12 用函数$y = a\sin bx$拟合数据

x_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
y_i	0.6	1.1	1.6	1.8	2.0	1.9	1.7	1.3

非线性最小二乘拟合

例3.12 用函数$y = a\sin bx$拟合数据

x_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
y_i	0.6	1.1	1.6	1.8	2.0	1.9	1.7	1.3

$$\min I(a,b) = \sum_{i=1}^{8}\left(a\sin bx_i - y_i\right)^2$$

非线性最小二乘拟合

例3.12 用函数$y = a\sin bx$拟合数据

x_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
y_i	0.6	1.1	1.6	1.8	2.0	1.9	1.7	1.3

$$\min I(a,b) = \sum_{i=1}^{8}\left(a\sin bx_i - y_i\right)^2$$

方法一: 用非线性方程求根: $\frac{\partial I}{\partial a} = \frac{\partial I}{\partial b} = 0$;

非线性最小二乘拟合

例3.12 用函数$y = a\sin bx$拟合数据

x_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
y_i	0.6	1.1	1.6	1.8	2.0	1.9	1.7	1.3

$$\min I(a,b) = \sum_{i=1}^{8}\left(a\sin bx_i - y_i\right)^2$$

方法一: 用非线性方程求根: $\frac{\partial I}{\partial a} = \frac{\partial I}{\partial b} = 0$;

方法二: 求非线性函数$I(a,b)$的极小

非线性最小二乘拟合

例3.12 用函数$y = a\sin bx$拟合数据

x_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
y_i	0.6	1.1	1.6	1.8	2.0	1.9	1.7	1.3

建立函数fitfun

非线性最小二乘拟合

例3.12 用函数$y = a\sin bx$拟合数据

x_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
y_i	0.6	1.1	1.6	1.8	2.0	1.9	1.7	1.3

建立函数fitfun

```
function err = fitfun(c,x,y)
   a = c(1);                     % coefficients
   b = c(2);
   err = y - a * sin(b*x);
   err = err'*err;
```

非线性最小二乘拟合

例3.12 用函数$y = a\sin bx$拟合数据

x_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
y_i	0.6	1.1	1.6	1.8	2.0	1.9	1.7	1.3

用fminsearch求最小值

非线性最小二乘拟合

```
function [err,a,b] = fit312(x,y)
  if nargin<2,
      x = [1:8]'/10;
      y = [0.6 1.1 1.6 1.8 2.0 1.9 1.7 1.3]';
  end
  c = fminsearch(@fitfun,[0;0],optimset,x,y);
  fprintf('NLS fitting y=a*sin(b*x) for data\n\n');
  fprintf('%6.1f',x);
  fprintf('\n');
  fprintf('%6.1f',y);
  fprintf('\n\n is\n\t y = ');
  fprintf('%7.4f * sin( %7.4f * x)\n\n',c(1),c(2));
  z = linspace(x(1),x(end),100);
  plot(x,y,'ro',z,c(1)*sin(c(2)*z),'b-.')
```

矛盾方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j = b_k, \quad (1 \le k \le m, m > n)$$

矛盾方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j = b_k, \quad (1 \le k \le m, m > n)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j - b_k \qquad \text{残差}$$

矛盾方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j = b_k, \quad (1 \le k \le m, m > n)$$

$$\min I(x) = \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j - b_k\right)^2 \quad \text{残差}$$

矛盾方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j = b_k, \quad (1 \le k \le m, m > n)$$

$$\min I(x) = \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j - b_k\right)^2 \quad \text{残差}$$

对x_i求偏导数, 令为0, 得到法方程为

矛盾方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j = b_k, \quad (1 \leq k \leq m, m > n)$$

$$\min I(x) = \sum_{k=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j - b_k\Big)^2 \quad \text{残差}$$

对x_i求偏导数, 令为0, 得到法方程为

$$\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{m} a_{ki}a_{kj}\Big)x_j = \sum_{k=1}^{m} a_{ki}a_k, \qquad 1 \leq i \leq n$$

矛盾方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j = b_k, \quad (1 \le k \le m, m > n)$$

$$\min I(x) = \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j - b_k\right)^2 \quad \text{残差}$$

对x_i求偏导数, 令为0, 得到法方程为

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m} a_{ki}a_{kj}\right)x_j = \sum_{k=1}^{m} a_{ki}a_k, \qquad 1 \le i \le n$$

如果原来的矛盾方程组为$Ax = b$, 则法方程为$A^TAx = A^Tb$.

矛盾方程组

例3.13 确定矛盾方程组

$$\begin{cases} 2x+3y=\ \ 1 \\ \ \ x-4y=-9 \\ \ \ 2x-y=-1 \end{cases}$$

在最小二乘意义下的最佳近似解。

矛盾方程组

例3.13 确定矛盾方程组

$$\begin{cases} 2x+3y= \ \ 1 \\ \ \ x-4y=-9 \\ \ \ 2x-y=-1 \end{cases}$$

在最小二乘意义下的最佳近似解。

解:

矛盾方程组

例3.13 确定矛盾方程组

$$\begin{cases} 2x+3y= & 1 \\ x-4y= & -9 \\ 2x-y= & -1 \end{cases}$$

在最小二乘意义下的最佳近似解。

解: 令$I=(2x+3y-1)^2+(x-4y+9)^2+(2x-y+1)^2$,

矛盾方程组

例3.13 确定矛盾方程组

$$\begin{cases} 2x+3y=\ \ 1 \\ \ \ x-4y=-9 \\ \ \ 2x-y=-1 \end{cases}$$

在最小二乘意义下的最佳近似解。

解: 令$I=(2x+3y-1)^2+(x-4y+9)^2+(2x-y+1)^2$, 求$I$达到极小的$x$和$y$的值

矛盾方程组

例3.13 确定矛盾方程组

$$\begin{cases} 2x+3y= & 1 \\ x-4y= & -9 \\ 2x-y= & -1 \end{cases}$$

在最小二乘意义下的最佳近似解。

解: 令$I=(2x+3y-1)^2+(x-4y+9)^2+(2x-y+1)^2$，求$I$达到极小的$x$和$y$的值

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial x}=4(2x+3y-1)+2(x-4y+9)+4(2x-y+1)=0 \\ \frac{\partial I}{\partial y}=6(2x+3y-1)-8(x-4y+9)-2(2x-y+1)=0 \end{cases}$$

矛盾方程组

例3.13 确定矛盾方程组

$$\begin{cases} 2x+3y=\ \ 1 \\ x-4y=-9 \\ 2x-y=-1 \end{cases}$$

在最小二乘意义下的最佳近似解。

解: 令$I=(2x+3y-1)^2+(x-4y+9)^2+(2x-y+1)^2$, 求$I$达到极小的$x$和$y$的值

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial x}=4(2x+3y-1)+2(x-4y+9)+4(2x-y+1)=0 \\ \frac{\partial I}{\partial y}=6(2x+3y-1)-8(x-4y+9)-2(2x-y+1)=0 \end{cases}$$

解得$x=-1, y=\frac{20}{13}$.

矛盾方程组

例3.13 确定矛盾方程组

$$\begin{cases} 2x+3y = 1 \\ x-4y = -9 \\ 2x-y = -1 \end{cases}$$

在最小二乘意义下的最佳近似解。

解: 也可以用$A^T Ax = A^T b$.

矛盾方程组

例3.13 确定矛盾方程组

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - 4y = -9 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$$

在最小二乘意义下的最佳近似解。

解: 也可以用$A^TAx = A^Tb$. 用MatLab求解

矛盾方程组

例3.13 确定矛盾方程组

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - 4y = -9 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$$

在最小二乘意义下的最佳近似解。

解:　也可以用$A^T Ax = A^T b$. 用MatLab求解

```
A = [ 2    3
      1   -4
      2    1 ];
b = [ 1  -9 -1 ];
c = A\b;
x = c(1);   y = c(2);
```