第六章　线性方程组的迭代解法

现代数值数学和计算课程

线性方程组的迭代解法

求解大规模线性代数方程组

$$Ax = b$$

线性方程组的迭代解法

求解大规模线性代数方程组

$$Ax = b$$

我们所要讨论的格式

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$$

线性方程组的迭代解法

求解大规模线性代数方程组

$$Ax = b$$

我们所要讨论的格式

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$$

向量序列$\{x^{(k)}\}$, 向量的分量$x_i^{(k)}$

基本迭代法

线性代数方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

基本迭代法

线性代数方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Jacobi迭代: 从第i个方程解出x_i

基本迭代法

线性代数方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Jacobi迭代: 从第i个方程解出x_i

$$\begin{cases} x_1 & = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n\right) \\ x_2 & = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n\right) \\ \cdots & \cdots \\ x_n & = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}\right) \end{cases}$$

基本迭代法

线性代数方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Jacobi迭代: 从第i个方程解出x_i

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} & = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} & = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}\right) \\ \quad\cdots & \cdots \\ x_n^{(k+1)} & = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}\right) \end{cases}$$

基本迭代法

Jacobi迭代: 从第i个方程解出x_i

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} & = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} & = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}\right) \\ \quad\cdots & \cdots \\ x_n^{(k+1)} & = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}\right) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = D - L - U$$

基本迭代法

Jacobi迭代: 从第i个方程解出x_i

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
x_1^{(k+1)} & = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}\right) \\
x_2^{(k+1)} & = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}\right) \\
\quad\cdots & \cdots \\
x_n^{(k+1)} & = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}\right)
\end{array}
\right.
$$

Jacobi迭代的矩阵形式

$$
Dx^{(k+1)} = b + (L + U)x^{(k)}
$$

基本迭代法

Jacobi迭代: 从第i个方程解出x_i

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} & = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} & = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}\right) \\ \quad \cdots & \cdots \\ x_n^{(k+1)} & = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}\right) \end{cases}$$

Jacobi迭代的矩阵形式

$$Dx^{(k+1)} = b + (L + U)x^{(k)}$$

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(D - A)x^{(k)} + D^{-1}b$$

基本迭代法

Jacobi迭代: 从第i个方程解出x_i

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} & = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} & = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}\right) \\ \quad\cdots & \cdots \\ x_n^{(k+1)} & = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}\right) \end{cases}$$

Jacobi迭代的矩阵形式

$$Dx^{(k+1)} = b + (L+U)x^{(k)}$$

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(D-A)x^{(k)} + D^{-1}b$$

基本迭代法

Jacobi迭代: 从第i个方程解出x_i

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}\right) \\
x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}\right) \\
\quad\cdots & \cdots \\
x_n^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}\right)
\end{cases}
$$

Jacobi迭代的矩阵形式

$$
\color{red}{D}x^{(k+1)} = b + (L + \color{blue}{U})x^{(k)}
$$

$$
x^{(k+1)} = \color{red}{D}^{-1}(\color{red}{D} - A)x^{(k)} + \color{red}{D}^{-1}b
$$

基本迭代法

Jacobi迭代: 从第i个方程解出x_i

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} & = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}\right) \\
x_2^{(k+1)} & = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}\right) \\
\quad\cdots & \cdots \\
x_n^{(k+1)} & = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)}\right)
\end{cases}
$$

Jacobi迭代的矩阵形式

$$
Dx^{(k+1)} = b + (L+U)x^{(k)}
$$

$$
x^{(k+1)} = D^{-1}(D-A)x^{(k)} + D^{-1}b
$$

基本迭代法

Gauss-Seidel迭代: 从第i个方程解出x_i

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} & = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} & = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}\right) \\ \quad\cdots & \cdots \\ x_n^{(k+1)} & = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)}\right) \end{cases}$$

Jacobi迭代的矩阵形式

$$Dx^{(k+1)} = b + (L + U)x^{(k)}$$

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(D - A)x^{(k)} + D^{-1}b$$

基本迭代法

Gauss-Seidel迭代: 从第i个方程解出x_i , 尽量使用新分量

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} & = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}\right) \\
x_2^{(k+1)} & = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}\right) \\
\quad\cdots & \cdots \\
x_n^{(k+1)} & = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)}\right)
\end{cases}
$$

Jacobi迭代的矩阵形式

$$Dx^{(k+1)} = b + (L + U)x^{(k)}$$

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(D - A)x^{(k)} + D^{-1}b$$

基本迭代法

Gauss-Seidel迭代: 从第i个方程解出x_i , 尽量使用新分量

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}\right) \\ \quad\cdots & \cdots \\ x_n^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)}\right) \end{cases}$$

Jacobi迭代的矩阵形式

$$Dx^{(k+1)} = b + (L + U)x^{(k)}$$

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(D - A)x^{(k)} + D^{-1}b$$

Gauss-Seidel迭代的矩阵形式

$$Dx^{(k+1)} = b + Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)}$$

基本迭代法

Gauss-Seidel迭代: 从第i个方程解出x_i , 尽量使用新分量

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} & = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} & = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}\right) \\ \quad\cdots & \cdots \\ x_n^{(k+1)} & = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)}\right) \end{cases}$$

Jacobi迭代的矩阵形式

$$Dx^{(k+1)} = b + (L + U)x^{(k)}$$

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(D - A)x^{(k)} + D^{-1}b$$

Gauss-Seidel迭代的矩阵形式

$$Dx^{(k+1)} = b + Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)}$$

$$x^{(k+1)} = (D - L)^{-1}Ux^{(k)} + (D - L)^{-1}b$$

基本迭代法

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right)$$

基本迭代法

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right)$$

基本迭代法

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

基本迭代法

SOR方法(超松弛, Successive OverRelaxation)

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

基本迭代法

SOR方法(超松弛, Successive OverRelaxation)

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

矩阵形式

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega D^{-1}(b + Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)} - Dx^{(k)})$$

基本迭代法

SOR方法(超松弛, Successive OverRelaxation)

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

矩阵形式

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega D^{-1}(b + Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)} - Dx^{(k)})$$

$$x^{(k+1)} = (D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D+\omega U]x^{(k)}+\omega(D-\omega L)^{-1}b$$

基本迭代法

例6.1

基本迭代法

例6.1

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -5 \end{bmatrix}$$

基本迭代法

例6.1

Jacobi迭代

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -5 \end{bmatrix}$$

基本迭代法

例6.1

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Jacobi迭代

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{3}(8 + x_1^{(k)} + x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{2}(-5 + x_2^{(k)}) \end{cases}$$

基本迭代法

例6.1

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Jacobi迭代

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{3}(8 + x_1^{(k)} + x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{2}(-5 + x_2^{(k)}) \end{cases}$$

G-S迭代

基本迭代法

例6.1

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Jacobi迭代

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{3}(8 + x_1^{(k)} + x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{2}(-5 + x_2^{(k)}) \end{cases}$$

G-S迭代

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{3}(8 + x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{2}(-5 + x_2^{(k+1)}) \end{cases}$$

基本迭代法

例6.1

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -5 \end{bmatrix}$$

SOR迭代: $\omega = 1.1$

Jacobi迭代

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{3}(8 + x_1^{(k)} + x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{2}(-5 + x_2^{(k)}) \end{cases}$$

G-S迭代

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{3}(8 + x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{2}(-5 + x_2^{(k+1)}) \end{cases}$$

基本迭代法

例6.1

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Jacobi迭代

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=\frac{1}{2}(1+x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)}=\frac{1}{3}(8+x_1^{(k)}+x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)}=\frac{1}{2}(-5+x_2^{(k)}) \end{cases}$$

SOR迭代: $\omega = 1.1$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=x_1^{(k)}+\frac{1.1}{2}(1-2x_1^{(k)}+x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)}=x_2^{(k)}+\frac{1.1}{3}(8+x_1^{(k+1)}-3x_2^{(k)}+x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)}=x_3^{(k)}+\frac{1.1}{2}(-5+x_2^{(k+1)}-2x_3^{(k)}) \end{cases}$$

G-S迭代

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=\frac{1}{2}(1+x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)}=\frac{1}{3}(8+x_1^{(k+1)}+x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)}=\frac{1}{2}(-5+x_2^{(k+1)}) \end{cases}$$

基本迭代法

例6.1

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Jacobi迭代

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=\frac{1}{2}(1+x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)}=\frac{1}{3}(8+x_1^{(k)}+x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)}=\frac{1}{2}(-5+x_2^{(k)}) \end{cases}$$

SOR迭代: $\omega=1.1$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=x_1^{(k)}+\frac{1.1}{2}(1-2x_1^{(k)}+x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)}=x_2^{(k)}+\frac{1.1}{3}(8+x_1^{(k+1)}-3x_2^{(k)}+x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)}=x_3^{(k)}+\frac{1.1}{2}(-5+x_2^{(k+1)}-2x_3^{(k)}) \end{cases}$$

G-S迭代

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=\frac{1}{2}(1+x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)}=\frac{1}{3}(8+x_1^{(k+1)}+x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)}=\frac{1}{2}(-5+x_2^{(k+1)}) \end{cases}$$

Run itdemo1

范数、条件数

定义6.1 $\|\bullet\|$定义在n维向量空间, 满足

- $\|x\| \geq 0$, 当且仅当$x=0$时等号成立;
- 对任意实数α, $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$;
- 对任意向量x, y, 成立$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$;

称$\|x\|$为向量x的范数。

范数、条件数

定义6.1 $\|\bullet\|$定义在n维向量空间, 满足

- $\|x\| \geq 0$, 当且仅当$x = 0$时等号成立;
- 对任意实数α, $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$;
- 对任意向量x, y, 成立$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$;

称$\|x\|$为向量x的范数。
常用的范数有

$$\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2}$$
$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$$
$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_n|\}$$

范数、条件数

定义6.2 对于任意n阶方阵A, 若对应实数$\|A\|$, 满足

- $\|A\| \geq 0$, 当且仅当$A = 0$时等号成立;
- 对任意实数α, $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$;
- 对任意方阵A, B, 成立$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$;
- 对任意方阵A, B, 成立$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$;

称$\|A\|$为矩阵A的范数。

范数、条件数

定义6.2 对于任意n阶方阵A, 若对应实数$\|A\|$, 满足

- $\|A\| \geq 0$, 当且仅当$A = 0$时等号成立;
- 对任意实数α, $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$;
- 对任意方阵A, B, 成立$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$;
- 对任意方阵A, B, 成立$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$;

称$\|A\|$为矩阵A的范数。

最后一个条件称为矩阵范数的相容性。

范数、条件数

定义6.2 对于任意n阶方阵A, 若对应实数$\|A\|$, 满足

- $\|A\| \geq 0$, 当且仅当$A = 0$时等号成立;
- 对任意实数α, $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$;
- 对任意方阵A, B, 成立$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$;
- 对任意方阵A, B, 成立$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$;

称$\|A\|$为矩阵A的范数。
最后一个条件称为矩阵范数的相容性。
定义6.3 设A是n阶矩阵, 称$\rho(A) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$为$A$的谱半径, λ_i是A的特征值。

范数、条件数

常用的矩阵范数

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \quad \|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} \qquad \|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$$

范数、条件数

常用的矩阵范数

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}| \quad \|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^TA)} \qquad \|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2}$$

矩阵范数和向量范数的相容性$\|Ax\| \le \|A\|\|x\|$

范数、条件数

常用的矩阵范数

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}| \quad \|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^TA)} \qquad \|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2}$$

矩阵范数和向量范数的相容性$\|Ax\| \le \|A\|\|x\|$

$$\|Ax\|_1 \le \|A\|_1\|x\|_1 \quad \|Ax\|_\infty \le \|A\|_\infty\|x\|_\infty$$

$$\|Ax\|_2 \le \|A\|_2\|x\|_2 \quad \|Ax\|_2 \le \|A\|_F\|x\|_2$$

范数、条件数

方程组的性态:

范数、条件数

方程组的性态:

$$\begin{bmatrix} 2.0002 & 1.9998 \\ 1.9998 & 2.0002 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

范数、条件数

方程组的性态:

$$\begin{bmatrix} 2.0002 & 1.9998 \\ 1.9998 & 2.0002 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad x = (1, 1)^T$$

范数、条件数

方程组的性态:

$$\begin{bmatrix} 2.0002 & 1.9998 \\ 1.9998 & 2.0002 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad x = (1, 1)^T$$

$$\begin{bmatrix} 2.0002 & 1.9998 \\ 1.9998 & 2.0002 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.0002 \\ 3.9998 \end{bmatrix}$$

范数、条件数

方程组的性态:

$$\begin{bmatrix} 2.0002 & 1.9998 \\ 1.9998 & 2.0002 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad x = (1, 1)^T$$

$$\begin{bmatrix} 2.0002 & 1.9998 \\ 1.9998 & 2.0002 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.0002 \\ 3.9998 \end{bmatrix} \qquad \tilde{x} = (1.5, 0.5)^T$$

范数、条件数

方程组的性态:

$$\begin{bmatrix} 2.0002 & 1.9998 \\ 1.9998 & 2.0002 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad x = (1, 1)^T$$

$$\begin{bmatrix} 2.0002 & 1.9998 \\ 1.9998 & 2.0002 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.0002 \\ 3.9998 \end{bmatrix} \qquad \tilde{x} = (1.5, 0.5)^T$$

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{1}{2}$$

范数、条件数

方程组的性态:

$$\begin{bmatrix} 2.0002 & 1.9998 \\ 1.9998 & 2.0002 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad x = (1,1)^T$$

$$\begin{bmatrix} 2.0002 & 1.9998 \\ 1.9998 & 2.0002 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.0002 \\ 3.9998 \end{bmatrix} \qquad \tilde{x} = (1.5, 0.5)^T$$

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\|b - \tilde{b}\|_\infty}{\|b\|_\infty} = \frac{1}{20000}$$

范数、条件数

$$A(x + \delta x) = b + \delta b$$

范数、条件数

$$A(x + \delta x) = b + \delta b$$

$$\delta x = A^{-1}\delta b$$

范数、条件数

$$A(x + \delta x) = b + \delta b$$

$$\delta x = A^{-1}\delta b$$

$$\|\delta x\| \leq \|A^{-1}\|\|\delta b\|$$

范数、条件数

$$A(x+\delta x) = b + \delta b$$

$$\delta x = A^{-1}\delta b$$

$$\|\delta x\| \le \|A^{-1}\|\|\delta b\|$$

此外 $\|b\| \le \|A\|\|x\|$

范数、条件数

$$A(x+\delta x) = b + \delta b$$

$$\delta x = A^{-1}\delta b$$

$$\|\delta x\| \le \|A^{-1}\|\|\delta b\|$$

此外 $\quad \|b\| \le \|A\|\|x\|$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

范数、条件数

$$A(x + \delta x) = b + \delta b \qquad (A + \delta A)(x + \delta x) = b$$

$$\delta x = A^{-1}\delta b$$

$$\|\delta x\| \leq \|A^{-1}\|\|\delta b\|$$

此外 $\|b\| \leq \|A\|\|x\|$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

范数、条件数

$$A(x+\delta x) = b + \delta b \qquad (A+\delta A)(x+\delta x) = b$$

$$\delta x = A^{-1}\delta b \qquad A\delta x + \delta A(x+\delta x) = 0$$

$$\|\delta x\| \le \|A^{-1}\|\|\delta b\|$$

此外 $\quad \|b\| \le \|A\|\|x\|$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

范数、条件数

$$A(x+\delta x) = b + \delta b$$

$$\delta x = A^{-1}\delta b$$

$$\|\delta x\| \le \|A^{-1}\|\|\delta b\|$$

此外 $\|b\| \le \|A\|\|x\|$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

$$(A+\delta A)(x+\delta x) = b$$

$$A\delta x + \delta A(x+\delta x) = 0$$

$$\delta x = -A^{-1}\delta A(x+\delta x)$$

范数、条件数

$$A(x+\delta x) = b + \delta b \qquad (A+\delta A)(x+\delta x) = b$$

$$\delta x = A^{-1}\delta b \qquad A\delta x + \delta A(x+\delta x) = 0$$

$$\|\delta x\| \le \|A^{-1}\|\|\delta b\| \qquad \delta x = -A^{-1}\delta A(x+\delta x)$$

此外 $\|b\| \le \|A\|\|x\| \quad \|\delta x\| \le \|A^{-1}\|\|\delta A\|\|x+\delta x\|$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

范数、条件数

$$A(x+\delta x) = b + \delta b \qquad (A+\delta A)(x+\delta x) = b$$

$$\delta x = A^{-1}\delta b \qquad A\delta x + \delta A(x+\delta x) = 0$$

$$\|\delta x\| \le \|A^{-1}\|\|\delta b\| \qquad \delta x = -A^{-1}\delta A(x+\delta x)$$

此外 $\|b\| \le \|A\|\|x\|$ $\quad \|\delta x\| \le \|A^{-1}\|\|\delta A\|\|x+\delta x\|$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \qquad \frac{\|\delta x\|}{\|x+\delta x\|} \le \|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

范数、条件数

$$A(x+\delta x) = b + \delta b \qquad (A+\delta A)(x+\delta x) = b$$

$$\delta x = A^{-1}\delta b \qquad A\delta x + \delta A(x+\delta x) = 0$$

$$\|\delta x\| \le \|A^{-1}\|\|\delta b\| \qquad \delta x = -A^{-1}\delta A(x+\delta x)$$

此外 $\|b\| \le \|A\|\|x\|$ $\quad \|\delta x\| \le \|A^{-1}\|\|\delta A\|\|x+\delta x\|$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \qquad \frac{\|\delta x\|}{\|x+\delta x\|} \le \|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

定义6.4 A为n阶可逆矩阵, 称$\mathrm{cond}(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$为矩阵$A$的条件数。

范数、条件数

条件数的性质(A可逆)

范数、条件数

条件数的性质(A可逆)

- $\mathrm{cond}(A) \geq 1$;

范数、条件数

条件数的性质(A可逆)

- $\mathrm{cond}(A) \geq 1$;
- 对任意常数$c \neq 0$, $\mathrm{cond}(cA) = \mathrm{cond}(A)$;

范数、条件数

条件数的性质(A可逆)

- $\mathrm{cond}(A) \geq 1$;
- 对任意常数$c \neq 0, \mathrm{cond}(cA) = \mathrm{cond}(A)$;
- 对任意正交矩阵$P, \mathrm{cond}_2(P) = 1$;

范数、条件数

条件数的性质(A可逆)

- $\mathrm{cond}(A) \geq 1$;
- 对任意常数$c \neq 0$, $\mathrm{cond}(cA) = \mathrm{cond}(A)$;
- 对任意正交矩阵P, $\mathrm{cond}_2(P) = 1$;
- 对任意正交矩阵P,
  $\mathrm{cond}_2(AP) = \mathrm{cond}_2(PA) = \mathrm{cond}_2(A)$.

范数、条件数

条件数的性质(A可逆)

- $\mathrm{cond}(A) \geq 1;$
- 对任意常数$c \neq 0$, $\mathrm{cond}(cA) = \mathrm{cond}(A);$
- 对任意正交矩阵P, $\mathrm{cond}_2(P) = 1;$
- 对任意正交矩阵P,
  $\mathrm{cond}_2(AP) = \mathrm{cond}_2(PA) = \mathrm{cond}_2(A).$

条件数小的矩阵称为良态矩阵;
条件数大的矩阵称为病态矩阵。

范数、条件数

Hilbert矩阵$H_{ij}=\frac{1}{i+j-1}$

$$H_n=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}$$

范数、条件数

Hilbert矩阵$H_{ij}=\frac{1}{i+j-1}$

```
>> cond(hilb(3))

ans =

    524.0568
```

范数、条件数

Hilbert矩阵$H_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$

```
>> cond(hilb(3))

ans =

     524.0568
>> cond(hilb(6))

ans =

     1.4951e+007
```

范数、条件数

Hilbert矩阵$H_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$

```
>> cond(hilb(3))

ans =

     524.0568
>> cond(hilb(6))

ans =

     1.4951e+007
>> cond(hilb(9))

ans =

     4.9315e+011
```

范数、条件数

Hilbert矩阵$H_{ij}=\frac{1}{i+j-1}$

```
>> cond(hilb(3))

ans =

     524.0568
>> cond(hilb(6))

ans =

     1.4951e+007
>> cond(hilb(9))

ans =

     4.9315e+011
```

教材例3.5

收敛性分析和误差估计

定义6.5 设A是n阶矩阵$(n \geq 2)$, 若存在排列阵P使得

$$P^T A P = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

称A为可约矩阵, 否则称为不可约矩阵。

收敛性分析和误差估计

定义6.5 设A是n阶矩阵$(n \geq 2)$, 若存在排列阵P使得

$$P^T A P = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

称A为可约矩阵, 否则称为不可约矩阵。

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad P^T A P P^T x = P^T b$$

收敛性分析和误差估计

定义6.5 设A是n阶矩阵$(n \geq 2)$, 若存在排列阵P使得

$$P^T A P = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

称A为可约矩阵, 否则称为不可约矩阵。

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad P^T A P P^T x = P^T b$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{bmatrix}$$

收敛性分析和误差估计

定义6.5 设A是n阶矩阵$(n \geq 2)$, 若存在排列阵P使得

$$P^T A P = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

称A为可约矩阵, 否则称为不可约矩阵。

定义6.6 若n阶方阵A满足

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

且其中有一个严格不等式成立, 称A是(行)弱对角占优矩阵; 若所有不等式严格成立, 称A是(行)(严格)对角占优矩阵。

收敛性分析和误差估计

引理6.1 严格对角占优矩阵或不可约弱对角占优矩阵A是可逆矩阵。

收敛性分析和误差估计

引理6.1 严格对角占优矩阵或不可约弱对角占优矩阵A是可逆矩阵。

证明(一): 假设A不可逆。则存在非零向量v, 使得$Av = 0$.

收敛性分析和误差估计

引理6.1 严格对角占优矩阵或不可约弱对角占优矩阵A是可逆矩阵。

证明(一): 假设A不可逆。则存在非零向量v, 使得$Av = 0$. 不妨设$\|v\|_\infty = 1$, 且$|v_r| = 1$.

收敛性分析和误差估计

引理6.1 严格对角占优矩阵或不可约弱对角占优矩阵A是可逆矩阵。

证明(一): 假设A不可逆。则存在非零向量v, 使得$Av = 0$. 不妨设$\|v\|_\infty = 1$, 且$|v_r| = 1$.

则$|v_j| \leq |v_r| = 1$.

收敛性分析和误差估计

引理6.1 严格对角占优矩阵或不可约弱对角占优矩阵A是可逆矩阵。

证明(一): 假设A不可逆。则存在非零向量v, 使得$Av = 0$. 不妨设$\|v\|_\infty = 1$, 且$|v_r| = 1$. 则$|v_j| \leq |v_r| = 1$. 从$Av = 0$的第r个方程得到,

$$|a_{rr}| \leq \sum_{j \neq r} |a_{rj}||v_j| \leq \sum_{j \neq r} |a_{rj}||v_j|.$$

收敛性分析和误差估计

引理6.1 严格对角占优矩阵或不可约弱对角占优矩阵A是可逆矩阵。

证明(一): 假设A不可逆。则存在非零向量v, 使得$Av = 0$. 不妨设$\|v\|_\infty = 1$, 且$|v_r| = 1$.
则$|v_j| \le |v_r| = 1$. 从$Av = 0$的第r个方程得到,

$$|a_{rr}| \le \sum_{j \neq r} |a_{rj}||v_j| \le \sum_{j \neq r} |a_{rj}||v_j|.$$

A是严格占优的, 因此上述不等式不成立, 矛盾。

收敛性分析和误差估计

引理6.1 严格对角占优矩阵或不可约弱对角占优矩阵A是可逆矩阵。

证明(一): 假设A不可逆。则存在非零向量v, 使得$Av = 0$. 不妨设$\|v\|_\infty = 1$, 且$|v_r| = 1$.
则$|v_j| \le |v_r| = 1$. 从$Av = 0$的第r个方程得到,

$$|a_{rr}| \le \sum_{j \ne r} |a_{rj}||v_j| \le \sum_{j \ne r} |a_{rj}||v_j|.$$

A是严格占优的, 因此上述不等式不成立, 矛盾。

引理6.2 设A是任意n阶方阵, 当$k \to \infty$时, $A^k \to 0$的充要条件是A的谱半径$\rho(A) < 1$.

收敛性分析和误差估计

引理6.1 严格对角占优矩阵或不可约弱对角占优矩阵A是可逆矩阵。

证明(一): 假设A不可逆。则存在非零向量v, 使得$Av = 0$. 不妨设$\|v\|_\infty = 1$, 且$|v_r| = 1$.
则$|v_j| \leq |v_r| = 1$. 从$Av = 0$的第r个方程得到,

$$|a_{rr}| \leq \sum_{j\neq r} |a_{rj}||v_j| \leq \sum_{j\neq r} |a_{rj}||v_j|.$$

A是严格占优的, 因此上述不等式不成立，矛盾。

引理6.2 设A是任意n阶方阵，当$k \to \infty$时，$A^k \to 0$的充要条件是A的谱半径$\rho(A) < 1$.

证明: 利用Jordan标准型。

收敛性分析和误差估计

定理6.1 任一矩阵A的谱半径不大于任一与某个向量范数相容的矩阵范数，

$$\rho(A) \le \|A\|.$$

收敛性分析和误差估计

定理6.1 任一矩阵A的谱半径不大于任一与某个向量范数相容的矩阵范数，

$$\rho(A) \le \|A\|.$$

证明:

收敛性分析和误差估计

定理6.1 任一矩阵A的谱半径不大于任一与某个向量范数相容的矩阵范数，

$$\rho(A) \leq \|A\|.$$

证明: 假设(λ_i, x_i)是矩阵A的特征对, 则$Ax_i = \lambda_i x_i$.

收敛性分析和误差估计

定理6.1 任一矩阵A的谱半径不大于任一与某个向量范数相容的矩阵范数，

$$\rho(A) \leq \|A\|.$$

证明: 假设(λ_i, x_i)是矩阵A的特征对, 则$Ax_i = \lambda_i x_i$. 两边取范数，

$$|\lambda_i|\|x_i\| \leq \|A\|\|x_i\|.$$

收敛性分析和误差估计

定理6.1 任一矩阵A的谱半径不大于任一与某个向量范数相容的矩阵范数,

$$\rho(A) \le \|A\|.$$

证明: 假设(λ_i, x_i)是矩阵A的特征对, 则$Ax_i = \lambda_i x_i$. 两边取范数,

$$|\lambda_i|\|x_i\| \le \|A\|\|x_i\|.$$

$$|\lambda_i| \le \|A\|$$

收敛性分析和误差估计

定理6.1 任一矩阵A的谱半径不大于任一与某个向量范数相容的矩阵范数，

$$\rho(A) \leq \|A\|.$$

证明：假设(λ_i, x_i)是矩阵A的特征对，则$Ax_i = \lambda_i x_i$. 两边取范数，

$$|\lambda_i| \|x_i\| \leq \|A\| \|x_i\|.$$

$$\rho(A) = \max_i |\lambda_i| \leq \|A\|$$

收敛性分析和误差估计

定理6.2 关于迭代格式$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$, x^*是真解,

- 格式对任意初值$x^{(0)}$收敛的充要条件为$\rho(B) < 1$;
- 若$\|B\| < 1$, 则有

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \tfrac{\|B\|^k}{1-\|B\|}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|$$

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \tfrac{\|B\|}{1-\|B\|}\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|.$$

收敛性分析和误差估计

定理6.2 关于迭代格式$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$, x^*是真解,

- 格式对任意初值$x^{(0)}$收敛的充要条件为$\rho(B) < 1$;

证明:

收敛性分析和误差估计

定理6.2 关于迭代格式$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$, x^*是真解,

- 格式对任意初值$x^{(0)}$收敛的充要条件为$\rho(B) < 1$;

证明:

$$\left.\begin{aligned} x^{(k+1)} &= Bx^{(k)} + g \\ x^* &= Bx^* + g \end{aligned}\right\}$$

收敛性分析和误差估计

定理6.2 关于迭代格式$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$, x^*是真解,

- 格式对任意初值$x^{(0)}$收敛的充要条件为$\rho(B) < 1$;

证明:

$$\left.\begin{aligned} x^{(k+1)} &= Bx^{(k)} + g \\ x^* &= Bx^* + g \end{aligned}\right\} \Rightarrow x^{(k+1)} - x^* = B(x^{(k)} - x^*)$$

收敛性分析和误差估计

定理6.2 关于迭代格式$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$, x^*是真解,

- 格式对任意初值$x^{(0)}$收敛的充要条件为$\rho(B) < 1$;

证明:

$$\left.\begin{aligned} x^{(k+1)} &= Bx^{(k)} + g \\ x^* &= Bx^* + g \end{aligned}\right\} \Rightarrow x^{(k+1)} - x^* = B(x^{(k)} - x^*)$$

$$\Rightarrow x^{(k)} - x^* = B^k(x^{(0)} - x^*)$$

收敛性分析和误差估计

定理6.2 关于迭代格式$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$, x^*是真解,

- 格式对任意初值$x^{(0)}$收敛的充要条件为$\rho(B) < 1$;

证明:

$$\left.\begin{array}{l} x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g \\ x^* = Bx^* + g \end{array}\right\} \Rightarrow x^{(k+1)} - x^* = B(x^{(k)} - x^*)$$

$$\Rightarrow x^{(k)} - x^* = B^k(x^{(0)} - x^*)$$

$x^{(0)}$是任意的，上式等价于$B^k \to 0$, 即$\rho(B) < 1$.

收敛性分析和误差估计

定理6.2 关于迭代格式$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$, x^*是真解,

- 若$\|B\| < 1$, 则有

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \frac{\|B\|^k}{1 - \|B\|}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|.$$

证明:

收敛性分析和误差估计

定理6.2 关于迭代格式$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$, x^*是真解,

- 若$\|B\| < 1$, 则有

$$\|x^{(k)} - x^*\| \le \frac{\|B\|^k}{1 - \|B\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|.$$

证明:

$$\lim_{k \to \infty} x^{(k)} = x^*$$

收敛性分析和误差估计

定理6.2 关于迭代格式$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$, x^*是真解,

- 若$\|B\| < 1$, 则有

$$\|x^{(k)} - x^*\| \le \frac{\|B\|^k}{1 - \|B\|}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|.$$

证明:

$$\lim_{k \to \infty} x^{(k)} = x^* \Rightarrow x^{(k)} - x^* = \sum_{i=k}^{\infty}(x^{(i)} - x^{(i+1)})$$

收敛性分析和误差估计

定理6.2 关于迭代格式$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$, x^*是真解,

- 若$\|B\| < 1$, 则有

$$\|x^{(k)} - x^*\| \le \frac{\|B\|^k}{1 - \|B\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|.$$

证明:

$$\begin{aligned} \|x^{(k)} - x^*\| &\le \sum_{i=k}^{\infty} \|x^{(i)} - x^{(i+1)}\| = \sum_{i=k}^{\infty} \|B^i (x^{(0)} - x^{(1)})\| \\ &\le \sum_{i=k}^{\infty} \|B^i\| \|x^{(0)} - x^{(1)}\| = \frac{\|B\|^k}{1 - \|B\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\| \end{aligned}$$

收敛性分析和误差估计

定理6.2 关于迭代格式$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$, x^*是真解,

- 若$\|B\| < 1$, 则有

$$\|x^{(k)} - x^*\| \le \frac{\|B\|}{1 - \|B\|}\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|.$$

证明:

收敛性分析和误差估计

定理6.2 关于迭代格式$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$, x^*是真解,

- 若$\|B\| < 1$, 则有

$$\|x^{(k)} - x^*\| \le \frac{\|B\|}{1 - \|B\|}\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|.$$

证明:

$$x^{(k)} - x^* = B(x^{(k-1)} - x^*) = B(x^{(k-1)} - x^{(k)}) + B(x^{(k)} - x^*)$$

收敛性分析和误差估计

定理6.2 关于迭代格式$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$, x^*是真解,

- 若$\|B\| < 1$, 则有

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \frac{\|B\|}{1 - \|B\|}\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|.$$

证明:

$$x^{(k)} - x^* = B(x^{(k-1)} - x^*) = B(x^{(k-1)} - x^{(k)}) + B(x^{(k)} - x^*)$$

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \|B\|\|x^{(k-1)} - x^{(k)}\| + \|B\|\|x^{(k)} - x^*\|$$

收敛性分析和误差估计

定理6.2 关于迭代格式$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$, x^*是真解,

- 若$\|B\| < 1$, 则有

$$\|x^{(k)} - x^*\| \le \frac{\|B\|}{1 - \|B\|}\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|.$$

证明:

$$x^{(k)} - x^* = B(x^{(k-1)} - x^*) = B(x^{(k-1)} - x^{(k)}) + B(x^{(k)} - x^*)$$

$$\|x^{(k)} - x^*\| \le \|B\|\|x^{(k-1)} - x^{(k)}\| + \|B\|\|x^{(k)} - x^*\|$$

移项即得。

收敛性分析和误差估计

定理6.3 若A是严格对角占优矩阵或不可约弱对角占优矩阵，则Jacobi迭代和GS迭代收敛。

收敛性分析和误差估计

定理6.3 若A是严格对角占优矩阵或不可约弱对角占优矩阵，则Jacobi迭代和GS迭代收敛。

证明:

收敛性分析和误差估计

定理6.3 若A是严格对角占优矩阵或不可约弱对角占优矩阵，则Jacobi迭代和GS迭代收敛。

证明: Jacobi迭代，$B_J = D^{-1}(L+U)$.

收敛性分析和误差估计

定理6.3 若A是严格对角占优矩阵或不可约弱对角占优矩阵，则Jacobi迭代和GS迭代收敛。

证明: Jacobi迭代，$B_J = D^{-1}(L+U)$. 假设B_J有一特征值$|\lambda| \geq 1$.

收敛性分析和误差估计

定理6.3 若A是严格对角占优矩阵或不可约弱对角占优矩阵，则Jacobi迭代和GS迭代收敛。

证明: Jacobi迭代，$B_J = D^{-1}(L+U)$. 假设B_J有一特征值$|\lambda| \geq 1$.

$$\det(\lambda I - B_J) = \det(\lambda I - D^{-1}(L+U)) = 0.$$

收敛性分析和误差估计

定理6.3 若A是严格对角占优矩阵或不可约弱对角占优矩阵，则Jacobi迭代和GS迭代收敛。

证明: Jacobi迭代，$B_J = D^{-1}(L+U)$. 假设B_J有一特征值$|\lambda| \geq 1$.

$$\det(\lambda I - B_J) = \det(\lambda I - D^{-1}(L+U)) = 0.$$

所以有

$$\det(\lambda D - L - U) = 0.$$

收敛性分析和误差估计

定理6.3 若A是严格对角占优矩阵或不可约弱对角占优矩阵，则Jacobi迭代和GS迭代收敛。

证明: Jacobi迭代，$B_J = D^{-1}(L+U)$. 假设B_J有一特征值$|\lambda| \geq 1$.

$$\det(\lambda I - B_J) = \det(\lambda I - D^{-1}(L+U)) = 0.$$

所以有

$$\det(\lambda D - L - U) = 0.$$

但矩阵$\lambda D - L - U$保持了矩阵$A = D - L - U$的对角占优和不可约的性质，是一可逆矩阵。矛盾。

收敛性分析和误差估计

定理6.3 若A是严格对角占优矩阵或不可约弱对角占优矩阵，则Jacobi迭代和GS迭代收敛。

证明: Jacobi迭代，$B_J = D^{-1}(L+U)$. 假设B_J有一特征值$|\lambda| \geq 1$.

$$\det(\lambda I - B_J) = \det(\lambda I - D^{-1}(L+U)) = 0.$$

所以有

$$\det(\lambda D - L - U) = 0.$$

但矩阵$\lambda D - L - U$保持了矩阵$A = D - L - U$的对角占优和不可约的性质，是一可逆矩阵。矛盾。
GS迭代部分证明完全类似Jacobi迭代。

收敛性分析和误差估计

定理6.4 若A是正定对称矩阵，则Jacobi迭代收敛的充要条件是$2D - A$也正定。

收敛性分析和误差估计

定理6.4 若A是正定对称矩阵，则Jacobi迭代收敛的充要条件是$2D - A$也正定。

证明:

收敛性分析和误差估计

定理6.4 若A是正定对称矩阵，则Jacobi迭代收敛的充要条件是$2D - A$也正定。

证明: 由A对称正定, $a_{ii} > 0$,

令$D^{\frac{1}{2}} = \mathrm{diag}(\sqrt{a_{11}}, \sqrt{a_{22}}, \cdots, \sqrt{a_{nn}})$

收敛性分析和误差估计

定理6.4 若A是正定对称矩阵，则Jacobi迭代收敛的充要条件是$2D-A$也正定。

证明: 由A对称正定, $a_{ii}>0$,

令$D^{\frac{1}{2}}=\mathrm{diag}(\sqrt{a_{11}},\sqrt{a_{22}},\cdots,\sqrt{a_{nn}})$

$$B_J=D^{-1}(D-A)=I-D^{-1}A=D^{-\frac{1}{2}}(I-D^{-\frac{1}{2}}AD^{-\frac{1}{2}})D^{\frac{1}{2}}$$

收敛性分析和误差估计

定理6.4 若A是正定对称矩阵，则Jacobi迭代收敛的充要条件是$2D-A$也正定。

证明：由A对称正定, $a_{ii}>0$,

令$D^{\frac{1}{2}}=\mathrm{diag}(\sqrt{a_{11}},\sqrt{a_{22}},\cdots,\sqrt{a_{nn}})$

$$B_J=D^{-1}(D-A)=I-D^{-1}A=D^{-\frac{1}{2}}(I-D^{-\frac{1}{2}}AD^{-\frac{1}{2}})D^{\frac{1}{2}}$$

B_J相似于对称阵$(I-D^{-\frac{1}{2}}AD^{-\frac{1}{2}})$, 特称值均为实数。

收敛性分析和误差估计

定理6.4 若A是正定对称矩阵，则Jacobi迭代收敛的充要条件是$2D - A$也正定。

证明:

Jacobi迭代收敛

收敛性分析和误差估计

定理6.4 若A是正定对称矩阵，则Jacobi迭代收敛的充要条件是$2D-A$也正定。

证明:

$$\text{Jacobi迭代收敛}$$

$$\Leftrightarrow \ \rho(B_J)=\rho(I-D^{-\frac{1}{2}}AD^{-\frac{1}{2}})<1$$

收敛性分析和误差估计

定理6.4 若A是正定对称矩阵，则Jacobi迭代收敛的充要条件是$2D-A$也正定。

证明:

$$
\begin{aligned}
& \text{Jacobi迭代收敛} \\
\Leftrightarrow\ & \rho(B_J) = \rho(I - D^{-\frac{1}{2}} A D^{-\frac{1}{2}}) < 1 \\
\Leftrightarrow\ & |1 - \mu(D^{-\frac{1}{2}} A D^{-\frac{1}{2}})| < 1
\end{aligned}
$$

收敛性分析和误差估计

定理6.4 若A是正定对称矩阵，则Jacobi迭代收敛的充要条件是$2D - A$也正定。

证明:

$$
\begin{aligned}
& \text{Jacobi迭代收敛} \\
\Leftrightarrow \ & \rho(B_J) = \rho(I - D^{-\frac{1}{2}} A D^{-\frac{1}{2}}) < 1 \\
\Leftrightarrow \ & |1 - \mu(D^{-\frac{1}{2}} A D^{-\frac{1}{2}})| < 1 \\
\Leftrightarrow \ & 0 < \mu(D^{-\frac{1}{2}} A D^{-\frac{1}{2}}) < 2
\end{aligned}
$$

收敛性分析和误差估计

定理6.4 若A是正定对称矩阵，则Jacobi迭代收敛的充要条件是$2D-A$也正定。

证明:

$$
\begin{aligned}
& \text{Jacobi迭代收敛} \\
\Leftrightarrow\ & \rho(B_J)=\rho(I-D^{-\frac{1}{2}}AD^{-\frac{1}{2}})<1 \\
\Leftrightarrow\ & |1-\mu(D^{-\frac{1}{2}}AD^{-\frac{1}{2}})|<1 \\
\Leftrightarrow\ & \qquad \mu(D^{-\frac{1}{2}}AD^{-\frac{1}{2}})<2
\end{aligned}
$$

收敛性分析和误差估计

定理6.4 若A是正定对称矩阵，则Jacobi迭代收敛的充要条件是$2D-A$也正定。

证明:

$$
\begin{aligned}
& \text{Jacobi迭代收敛} \\
\Leftrightarrow\ & \rho(B_J)=\rho(I-D^{-\frac{1}{2}}AD^{-\frac{1}{2}})<1 \\
\Leftrightarrow\ & |1-\mu(D^{-\frac{1}{2}}AD^{-\frac{1}{2}})|<1 \\
\Leftrightarrow\ & \qquad \mu(D^{-\frac{1}{2}}AD^{-\frac{1}{2}})<2 \\
\Leftrightarrow\ & 2I-D^{-\frac{1}{2}}AD^{-\frac{1}{2}}\text{正定}
\end{aligned}
$$

收敛性分析和误差估计

定理6.4 若A是正定对称矩阵，则Jacobi迭代收敛的充要条件是$2D-A$也正定。

证明:

$$
\begin{aligned}
& \text{Jacobi迭代收敛} \\
\Leftrightarrow\ & \rho(B_J)=\rho(I-D^{-\frac{1}{2}}AD^{-\frac{1}{2}})<1 \\
\Leftrightarrow\ & |1-\mu(D^{-\frac{1}{2}}AD^{-\frac{1}{2}})|<1 \\
\Leftrightarrow\ & \qquad \mu(D^{-\frac{1}{2}}AD^{-\frac{1}{2}})<2 \\
\Leftrightarrow\ & 2I-D^{-\frac{1}{2}}AD^{-\frac{1}{2}}\text{正定} \\
\Leftrightarrow\ & 2D-A=D^{\frac{1}{2}}(2I-D^{-\frac{1}{2}}AD^{-\frac{1}{2}})D^{\frac{1}{2}}\text{正定}
\end{aligned}
$$

收敛性分析和误差估计

定理6.5 SOR迭代收敛的必要条件是$0 < \omega < 2$.

收敛性分析和误差估计

定理6.5 SOR迭代收敛的必要条件是$0 < \omega < 2$.

证明:

收敛性分析和误差估计

定理6.5 **SOR**迭代收敛的必要条件是$0 < \omega < 2$.
证明: $B_{SOR} = (D - \omega L)^{-1}[(1-\omega)D + \omega U]$.
设$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$是$B_{SOR}$的$n$个特征值。

收敛性分析和误差估计

定理6.5 **SOR**迭代收敛的必要条件是$0 < \omega < 2$.

证明: $B_{SOR} = (D - \omega L)^{-1}[(1-\omega)D + \omega U]$.

设$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$是$B_{SOR}$的$n$个特征值。

$$1 > (\rho(B_{SOR}))^n$$

收敛性分析和误差估计

定理6.5 **SOR**迭代收敛的必要条件是$0 < \omega < 2$.

证明: $B_{SOR} = (D - \omega L)^{-1}[(1 - \omega)D + \omega U]$.

设$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$是$B_{SOR}$的$n$个特征值。

$$\begin{aligned} 1 &> (\rho(B_{SOR}))^n \\ &\geq |\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n| \end{aligned}$$

收敛性分析和误差估计

定理6.5 **SOR**迭代收敛的必要条件是$0 < \omega < 2$.

证明: $B_{SOR} = (D - \omega L)^{-1}[(1-\omega)D + \omega U]$.

设$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$是$B_{SOR}$的$n$个特征值。

$$\begin{aligned} 1 &> (\rho(B_{SOR}))^n \\ &\geq |\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n| \\ &= |\det(B_{SOR})| \end{aligned}$$

收敛性分析和误差估计

定理6.5 **SOR**迭代收敛的必要条件是$0 < \omega < 2$.

证明: $B_{SOR} = (D - \omega L)^{-1}[(1-\omega)D + \omega U]$.

设$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$是$B_{SOR}$的$n$个特征值。

$$
\begin{aligned}
1 &> (\rho(B_{SOR}))^n \\
&\geq |\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n| \\
&= |\det(B_{SOR})| \\
&= |\det((D - \omega L)^{-1})||\det((1-\omega)D + \omega U)|
\end{aligned}
$$

收敛性分析和误差估计

定理6.5 SOR迭代收敛的必要条件是$0 < \omega < 2$.

证明: $B_{SOR} = (D - \omega L)^{-1}[(1-\omega)D + \omega U]$.

设$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$是$B_{SOR}$的$n$个特征值。

$$
\begin{aligned}
1 &> (\rho(B_{SOR}))^n \\
&\geq |\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n| \\
&= |\det(B_{SOR})| \\
&= |\det((D-\omega L)^{-1})||\det((1-\omega)D + \omega U)| \\
&= |a_{11}^{-1} a_{22}^{-1} \cdots a_{nn}^{-1}||(1-\omega)^n a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}|
\end{aligned}
$$

收敛性分析和误差估计

定理6.5 **SOR**迭代收敛的必要条件是$0 < \omega < 2$.

证明: $B_{SOR} = (D - \omega L)^{-1}[(1-\omega)D + \omega U]$.

设$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$是$B_{SOR}$的$n$个特征值。

$$
\begin{aligned}
1 &> (\rho(B_{SOR}))^n \\
&\geq |\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n| \\
&= |\det(B_{SOR})| \\
&= |\det((D-\omega L)^{-1})||\det((1-\omega)D + \omega U)| \\
&= |a_{11}^{-1} a_{22}^{-1} \cdots a_{nn}^{-1}||(1-\omega)^n a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}| \\
&= |(1-\omega)^n|
\end{aligned}
$$

收敛性分析和误差估计

定理6.5 **SOR**迭代收敛的必要条件是$0 < \omega < 2$.
证明: $B_{SOR} = (D - \omega L)^{-1}[(1-\omega)D + \omega U]$.
设$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$是$B_{SOR}$的$n$个特征值。

$$
\begin{aligned}
1 &> (\rho(B_{SOR}))^n \\
&\geq |\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n| \\
&= |\det(B_{SOR})| \\
&= |\det((D - \omega L)^{-1})||\det((1-\omega)D + \omega U)| \\
&= |a_{11}^{-1} a_{22}^{-1} \cdots a_{nn}^{-1}||(1-\omega)^n a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}| \\
&= |(1-\omega)^n|
\end{aligned}
$$

所以, $0 < \omega < 2$.

收敛性分析和误差估计

定理6.6 设系数矩阵A对称正定, 则$0 < \omega < 2$时SOR迭代收敛。

收敛性分析和误差估计

定理6.6 设系数矩阵A对称正定, 则$0 < \omega < 2$时SOR迭代收敛。

证明:

收敛性分析和误差估计

定理6.6 设系数矩阵A对称正定, 则$0 < \omega < 2$时**SOR**迭代收敛。

证明: 只需证明B_{SOR}的任一特征值$|\lambda| < 1.$

收敛性分析和误差估计

定理6.6 设系数矩阵A对称正定, 则$0 < \omega < 2$时**SOR**迭代收敛。

证明: 只需证明B_{SOR}的任一特征值$|\lambda| < 1$. 设x是其对应的特征向量，则

收敛性分析和误差估计

定理6.6 设系数矩阵A对称正定, 则$0 < \omega < 2$时**SOR**迭代收敛。

证明: 只需证明B_{SOR}的任一特征值$|\lambda| < 1$. 设x是其对应的特征向量，则

$$(D - \omega L)^{-1}[(1 - \omega)D + \omega U]x = \lambda x$$

收敛性分析和误差估计

定理6.6 设系数矩阵A对称正定, 则$0 < \omega < 2$时**SOR**迭代收敛。

证明: 只需证明B_{SOR}的任一特征值$|\lambda| < 1$. 设x是其对应的特征向量，则

$$(D - \omega L)^{-1}[(1 - \omega)D + \omega U]x = \lambda x$$

$$[(1 - \omega)D + \omega U]x = \lambda(D - \omega L)x$$

收敛性分析和误差估计

定理6.6 设系数矩阵A对称正定, 则$0 < \omega < 2$时**SOR**迭代收敛。

证明: 只需证明B_{SOR}的任一特征值$|\lambda| < 1$. 设x是其对应的特征向量，则

$$(D - \omega L)^{-1}[(1-\omega)D + \omega U]x = \lambda x$$

$$[(1-\omega)D + \omega U]x = \lambda(D - \omega L)x$$

$$(1-\omega)x^H Dx + \omega x^H Ux = \lambda(x^H Dx - \omega x^H Lx)$$

收敛性分析和误差估计

定理6.6 设系数矩阵A对称正定, 则$0 < \omega < 2$时**SOR**迭代收敛。

证明: 只需证明B_{SOR}的任一特征值$|\lambda| < 1$. 设x是其对应的特征向量，则

$$(D - \omega L)^{-1}[(1-\omega)D + \omega U]x = \lambda x$$

$$[(1-\omega)D + \omega U]x = \lambda(D - \omega L)x$$

$$(1-\omega)x^H Dx + \omega x^H Ux = \lambda(x^H Dx - \omega x^H Lx)$$

记$x^H Dx = \sigma, x^H Lx = \alpha + i\beta,$

收敛性分析和误差估计

定理6.6 设系数矩阵A对称正定，则$0 < \omega < 2$时**SOR**迭代收敛。

证明: 只需证明B_{SOR}的任一特征值$|\lambda| < 1$. 设x是其对应的特征向量，则

$$(D - \omega L)^{-1}[(1-\omega)D + \omega U]x = \lambda x$$

$$[(1-\omega)D + \omega U]x = \lambda(D - \omega L)x$$

$$(1-\omega)x^H Dx + \omega x^H Ux = \lambda(x^H Dx - \omega x^H Lx)$$

记$x^H Dx = \sigma, x^H Lx = \alpha + i\beta,$
则$x^H Ux = (x^H Lx)^H = \alpha - i\beta.$

收敛性分析和误差估计

定理6.6 设系数矩阵A对称正定, 则$0 < \omega < 2$时SOR迭代收敛。

证明: 只需证明B_{SOR}的任一特征值$|\lambda| < 1$. 设x是其对应的特征向量，则

$$(D - \omega L)^{-1}[(1-\omega)D + \omega U]x = \lambda x$$

$$[(1-\omega)D + \omega U]x = \lambda(D - \omega L)x$$

$$(1-\omega)x^H Dx + \omega x^H Ux = \lambda(x^H Dx - \omega x^H Lx)$$

记$x^H Dx = \sigma, x^H Lx = \alpha + i\beta$,

则$x^H Ux = (x^H Lx)^H = \alpha - i\beta$.

$$\lambda = \frac{(1-\omega)\sigma + \omega(\alpha - i\beta)}{\sigma - \omega(\alpha + i\beta)}$$

收敛性分析和误差估计

定理6.6 设系数矩阵A对称正定, 则$0 < \omega < 2$时**SOR**迭代收敛。

证明: 记$x^H Dx = \sigma, x^H Lx = \alpha + i\beta,$

则$x^H Ux = (x^H Lx)^H = \alpha - i\beta.$

$$\lambda = \frac{(1-\omega)\sigma + \omega(\alpha - i\beta)}{\sigma - \omega(\alpha + i\beta)}$$

$$|\lambda|^2 = \frac{(\sigma - \omega\sigma + \omega\alpha)^2 + (\omega\beta)^2}{(\sigma - \omega\alpha)^2 + (\omega\beta)^2}$$

收敛性分析和误差估计

定理6.6 设系数矩阵A对称正定, 则$0 < \omega < 2$时**SOR**迭代收敛。

证明: 记$x^H Dx = \sigma, x^H Lx = \alpha + i\beta$,

则$x^H Ux = (x^H Lx)^H = \alpha - i\beta$.

$$\lambda = \frac{(1-\omega)\sigma + \omega(\alpha - i\beta)}{\sigma - \omega(\alpha + i\beta)}$$

$$|\lambda|^2 = \frac{(\sigma - \omega\sigma + \omega\alpha)^2 + (\omega\beta)^2}{(\sigma - \omega\alpha)^2 + (\omega\beta)^2}$$

$$(\sigma - \omega\sigma + \omega\alpha)^2 - (\sigma - \omega\alpha)^2 = \omega\sigma(2-\omega)(2\alpha - \sigma)$$

收敛性分析和误差估计

定理6.6 设系数矩阵A对称正定, 则$0<\omega<2$时**SOR**迭代收敛。

证明:

$$|\lambda|^2=\frac{(\sigma-\omega\sigma+\omega\alpha)^2+(\omega\beta)^2}{(\sigma-\omega\alpha)^2+(\omega\beta)^2}$$

$$(\sigma-\omega\sigma+\omega\alpha)^2-(\sigma-\omega\alpha)^2=\omega\sigma(2-\omega)(2\alpha-\sigma)$$

$$\sigma=x^HDx=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}|x_i|^2>0,$$

收敛性分析和误差估计

定理6.6 设系数矩阵A对称正定, 则$0 < \omega < 2$时**SOR**迭代收敛。

证明:

$$|\lambda|^2 = \frac{(\sigma - \omega\sigma + \omega\alpha)^2 + (\omega\beta)^2}{(\sigma - \omega\alpha)^2 + (\omega\beta)^2}$$

$$(\sigma - \omega\sigma + \omega\alpha)^2 - (\sigma - \omega\alpha)^2 = \omega\sigma(2-\omega)(2\alpha - \sigma)$$

$$\sigma = x^H D x = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}|x_i|^2 > 0,$$

$$\sigma - 2\alpha = x^H D x - x^H L x - x^H U x = x^H A x > 0.$$

收敛性分析和误差估计

定理6.6 设系数矩阵A对称正定, 则$0 < \omega < 2$时**SOR**迭代收敛。

证明:

$$|\lambda|^2 = \frac{(\sigma - \omega\sigma + \omega\alpha)^2 + (\omega\beta)^2}{(\sigma - \omega\alpha)^2 + (\omega\beta)^2}$$

$$(\sigma - \omega\sigma + \omega\alpha)^2 - (\sigma - \omega\alpha)^2 = \omega\sigma(2-\omega)(2\alpha - \sigma) < 0$$

$$\sigma = x^H D x = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}|x_i|^2 > 0,$$

$$\sigma - 2\alpha = x^H D x - x^H L x - x^H U x = x^H A x > 0.$$

收敛性分析和误差估计

定理6.6 设系数矩阵A对称正定, 则$0 < \omega < 2$时**SOR**迭代收敛。

证明:

$$|\lambda|^2 = \frac{(\sigma - \omega\sigma + \omega\alpha)^2 + (\omega\beta)^2}{(\sigma - \omega\alpha)^2 + (\omega\beta)^2} < 1$$

$$(\sigma - \omega\sigma + \omega\alpha)^2 - (\sigma - \omega\alpha)^2 = \omega\sigma(2-\omega)(2\alpha - \sigma) < 0$$

$$\sigma = x^H D x = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}|x_i|^2 > 0,$$

$$\sigma - 2\alpha = x^H D x - x^H L x - x^H U x = x^H A x > 0.$$

基于变分原理的迭代法

X

基于变分原理的迭代法

X

基于变分原理的迭代法

x

基于变分原理的迭代法

x

基于变分原理的迭代法

X

基于变分原理的迭代法

X

基于变分原理的迭代法

x

基于变分原理的迭代法

x

基于变分原理的迭代法

X

基于变分原理的迭代法

X

基于变分原理的迭代法

X

基于变分原理的迭代法

X

基于变分原理的迭代法

x

基于变分原理的迭代法

x

基于变分原理的迭代法

X

基于变分原理的迭代法

X