第六讲　　级数

例 1．求幂级数$\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{\ln n}{n^3}+\frac{1}{n\ln n})x^n$的收敛域。

解　先求$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^3}x^n$的收敛域。为此，令$a_n=\frac{\ln n}{n^3}$，则因

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$故收敛半径 R=1，易见当$x=\pm 1$时，$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^3}x^n$都绝对收敛，从而收敛域为$[-1,1]$。

下面再求幂级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}x^n$的收敛域。

令$b_n=\frac{1}{n\ln n}$，则因

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|=1$，故收敛半径 R=1。

易见$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}x^n$的收敛域为$[-1,1)$。

故原级数的收敛域为$[-1,1]\cap[-1,1)$即$[-1,1)$。

例 2．求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x-1}{a_n+1})^n$ 的收敛区间，并讨论端点的敛散性，其中$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$发散，且$0<a_{n+1}<a_n$ ($(n\in\mathrm{N})$ 。

解　设$a=\lim_{n\to\infty}a_n$，则因$\{a_n\}$单调下降有下界 0，故$a\in\mathbb{R}$，且$a\geq 0$。

而$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$发散，所以$a>0$，令$u_n=(\frac{1}{a_n+1})^n$，则

$$l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n+1}=\frac{1}{a+1}$$

收敛半径$R=\frac{1}{l}=a+1$,

收敛区间为$(-a,a+2)$。而端点上都发散。

因此，收敛域为$(-a,a+2)$

例 3．求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}$的和。

解 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)x^{n-2},|x|<1$，

则$\int_0^x(\int_0^t s(u)du)dt=\sum_{n=2}^{\infty}x^n=\frac{x^2}{1-x}$

从而$s(x)=(\frac{x^2}{1-x})''=\frac{2}{(1-x)^3}$,

第一项=$\left.\frac{2x^2}{(1-x)^3}\right|_{x=-\frac{1}{2}}=\frac{4}{27}$，因此，原式=$\frac{4}{27}+\frac{2}{3}=\frac{22}{27}$。

例 4．判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{(n!)^{\alpha}}}$的敛散性，其中$\alpha>0$为常数。

解法 1（ 利用正项级数的对数判别法）

记$a_n=\left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{\alpha}{n}}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}=\alpha\lim_{n\to\infty}\frac{\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n}{n\ln n}$$

$$=\alpha\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{(n+1)\ln(n+1)-n\ln n}$$

$$=\alpha\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{n\ln(1+\frac{1}{n})+\ln(n+1)}=\alpha,$$

若$\alpha>1$ ，则由极限的保号性知，$\exists k$，使得当$n>k$时，

$$\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}>\frac{\alpha+1}{2}=1+\frac{\alpha-1}{2}$$

由对数判别法知，当$\alpha>1$时，级数收敛。

而当$0<\alpha\le 1$时， 因$a_n=\left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{\alpha}{n}}\ge\frac{1}{n}$，而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，

故由比较判别法知，原级数发散。

[注记 1]（正项级数的对数判别法）

若$\exists k$和常数$\alpha>0$使得当$n>k$时，$\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\ge 1+\alpha$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，若$\exists k$，使得当$n>k$时，$\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\le 1$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散。

[**注记 2**]（对数判别法的证明）

若$\exists k$和常数$\alpha>0$使得当$n>k$时，$\dfrac{\ln\dfrac{1}{a_n}}{\ln n}\ge 1+\alpha$，则

$\ln\dfrac{1}{a_n}\ge(1+\alpha)\ln n=\ln(n^{1+\alpha})$，即

$\dfrac{1}{a_n}\ge n^{1+\alpha}$，$\dfrac{1}{n^{1+\alpha}}\ge a_n$

因此由比较判别法知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛。

若$\exists k$，使得当$n>k$时，$\dfrac{\ln\dfrac{1}{a_n}}{\ln n}\le 1$，

则 $\ln\dfrac{1}{a_n}\le\ln n$ ，即$\dfrac{1}{a_n}\le n$，$a_n\ge\dfrac{1}{n}$，

因此由比较判别法知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散。

解法 2 利用 *Stirling* 公式 $n!=\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n+\frac{\theta_n}{12n}}$ ，其中 $0\le\theta_n\le 1$。

因$\left(n!\right)^{\frac{\alpha}{n}}=\left(\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n+\frac{\theta_n}{12n}}\right)^{\frac{\alpha}{n}}=n^{\alpha}(2\pi)^{\frac{\alpha}{2n}}n^{\frac{\alpha}{2n}}e^{-\alpha+\frac{\theta_n}{12n^2}\alpha}$，而

$(2\pi)^{\frac{\alpha}{2n}}n^{\frac{\alpha}{2n}}e^{-\alpha+\frac{\theta_n}{12n^2}\alpha}\to\dfrac{1}{e^{\alpha}}$，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{\left(n!\right)^{\alpha}}}$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}$有相同的敛散性。

因此，原级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{(n!)^{\alpha}}}$当$\alpha>1$时，级数收敛，当$0<\alpha\le 1$时，级数发散。

例 5. 将级数$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots$的各项重新安排，使先依次出现$p$个正项，再出现$q$个负项，然后如此交替。证明新级数的和为$\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}$。

证
$$
\begin{aligned}
S_{(p+q)n}=\ & 1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2p-1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\cdots-\frac{1}{2q}\\
&+\frac{1}{2p+1}+\frac{1}{2p+3}+\cdots+\frac{1}{4p-1}-\frac{1}{2q+2}-\frac{1}{2q+4}-\cdots-\frac{1}{4q}\\
&+\cdots+\frac{1}{2np-(2p-1)}+\frac{1}{2np-(2p-3)}+\cdots+\frac{1}{2np-1}-\\
&\frac{1}{2nq-(2q-2)}-\frac{1}{2nq-(2q-4)}-\cdots-\frac{1}{2nq}\\
&=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2np}-(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2np})-\\
&(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2nq})
\end{aligned}
$$

$$
=\begin{aligned}&C+\ln(2np)+\varepsilon_{2np}-\frac{1}{2}(C+\ln(np)+\varepsilon_{np})-\frac{1}{2}(C+\ln(nq)+\varepsilon_{nq})\\&\to\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}\end{aligned}
$$
。

作业：

练习 1 设$a_1=1$，$a_2=1$，$a_{n+2}=2a_{n+1}+3a_n$，$n\ge 1$，求$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径，收敛域及和函数。

练习 2 问$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\tan(\sqrt{n^2+2}\cdot\pi)$ 是否收敛？是否绝对收敛？

练习 3 证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 当 x>1 时连续并任意次可微。

练习 4 讨论收敛性

$$1-\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4^x}+\frac{1}{5}-\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)}+\frac{1}{(2n)^x}+\cdots\cdots。$$

练习 5 证明：对一切 x 和 $n\geq 1$,成立 $\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}<3\sqrt{\pi}$ 。

练习 6 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n+1}{2}$ 的和。

练习 7 将 $y=\sin x, x\in(0,\pi)$ 展开成余弦级数，并求级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}$ 的和。

练习 8 设 $u_n(x)=x^n\ln x$, $x\in[0,1]$。

1) 试讨论 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $(0,1]$ 上的收敛性和一致收敛性；

2) 计算 $\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\ln x dx\right)$。

练习 9 证明：函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\ln(1+n^2x^2)$ 在区间 $[-1,\ 1]$ 上一致收敛。

练习 10 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,\ 1]$ 内有定义，在开区间 $(-1,\ 1)$ 内有一阶连续导数，且 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ ，证明：

（1） $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n f\left(\frac{1}{n}\right)$ 收敛；

（2） $\sum_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$ 发散。

练习 11 求 $f(x)=\arctan\frac{2x}{1-x^2}$ 在 $x=0$ 处的幂级数展开式，并计算

$S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 之值。

练习 12 设 $x_{n+1}=\frac{k+x_n}{1+x_n}, k>1, x_1\geq 0$.

1) 证明级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(x_{n+1}-x_{n)}$ 绝对收敛；

2) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(x_{n+1}-x_n\right)$ 之和.

练习 13 证明：$\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n(1+x^n)}=\frac{1}{2}\ln 2$。

练习 14 讨论正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+2)}{(a+1/n)^n}$ （$a>0$）的敛散性。