积分值估计

例 1：$f(x)$在$[0,1]$上有连续二阶导数，$f(0)=f(1)=0, f(x)\neq 0$（当$x\in(0,1)$时），试证：

$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|dx\geq 4。$$

例 2：设$f(x)$在$[a,b]$上二次连续可微，$f(\frac{a+b}{2})=0$，试证：

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq M\frac{(b-a)^3}{24}，其中 M=\sup_{a\leq x\leq b}|f''(x)|。$$

例 3：设$f(x)$在$[a,b]$上连续可微，且$f(a)=f(b)=0$，则

$$\max_{a\leq x\leq b}|f'(x)|\geq\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b|f(x)|dx。$$

例 4：在$[0,2]$上是否存在这样的函数：连续可微，并且$f(0)=f(2)=1$，$|f'(x)|\leq 1$，$\int_0^2 f(x)dx\leq 1$？

例 5：设$f(x)$在$[0, 1]$上连续，且$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$，$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=0$，……，$\int_0^1 x^{n-1}f(x)\mathrm{d}x=0$，$\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x=1$，证明：存在$\xi\in[0, 1]$，使$|f(\xi)|\geq 2^n(n+1)$。

例 6：设f在$[a,+\infty)$上一致连续，并且$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛，则

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0.$

(2) 若将题目中的条件一直连续改为连续，结论如何？

例 7：设$f(x)$单调递增，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=A$，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$。

作业 1：设$f:[0,2]\to\mathbb{R}$二次连续可导，且$|f(x)|\leq 1$及$|f''(x)|\leq 1$（$\forall x\in[0,2]$）。证明：$\forall x\in[0,2]$，有$|f'(x)|\leq 2$。

作业 2：设f在$[a,b]$上连续可导，证明：

$$\max_{a\leq x\leq b}|f(x)|\leq\frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)dx\right|+\int_a^b|f'(x)|dx。$$