第四讲　　中值定理

积分第一中值定理：

设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号，则 $\exists\xi\in(a,b)$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx。$$

积分第二中值定理：

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $\exists\xi\in(a,b)$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(a)\int_a^\xi g(x)dx+f(b)\int_\xi^b g(x)dx。$$

例 1．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $f(0)=0,f(1)=1$。证明：对任意正数 a、b，必存在 $(0,1)$ 内的两个不同的数 ξ 与 η，使

$$\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=a+b。$$

证　设 $0<a\le b<1$，令 $c_0=\dfrac{a}{a+b}$，则 $0<c_0<1$。因 $f(0)=0,f(1)=1$ 且 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，由介值性定理存在 $c\in(0,1)$，使得 $f(c)=c_0$。现在在 $[0,c]$ 上利用拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(0,c)$，有

$$f'(\xi)=\frac{f(c)-f(0)}{c-0}=\frac{c_0}{c-0}=\frac{a}{(a+b)c}。$$

同理在[c,1]上利用拉格朗日中值定理存在 $\eta\in(c,1)$，有

$$f'(\eta)=\frac{f(1)-f(c)}{1-c}=\frac{1-c_0}{1-c}=\frac{b}{(a+b)(1-c)}。$$

于是

$$\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=(a+b)c+(a+b)(1-c)=a+b\text{。}$$

命题得证。

例 2．已知函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上三阶可导，且

$f\left(0\right)=-1$，$f\left(1\right)=0$，$f'\left(0\right)=0$，试证 $\forall x\in\left(0,1\right)$，$\exists\xi\in\left(0,1\right)$，使

$$f\left(x\right)=-1+x^2+\frac{x^2\left(x-1\right)}{3!}f'''\left(\xi\right)$$

证　$\forall x\in(0,1)$，作函数 $g:(0,1)\to\mathbb{R}$ 使

$$g(t)=f(t)+1-t^2-\frac{f(x)+1-x^2}{x^2(x-1)}t^2(t-1),\quad t\in(0,1)$$

第一步：因函数 $f\left(t\right)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上三阶可导，$f\left(0\right)=-1$，$f\left(1\right)=0$，故 $g(x)=g(1)=g(0)=0$，从而 $\exists\xi_1\in\left(0,x\right),\xi_2\in\left(x,1\right)$，使得 $g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=0$，且 $0<\xi_1<x<\xi_2<1$，

第二步：因 $g'(t)=f'(t)-2t-\dfrac{f(x)+1-x^2}{x^2(x-1)}(3t^2-2t)$，$f'\left(0\right)=0$，故 $g'(0)=0$，从而由 $g'(0)=0$ 和 $g'(\xi_1)=0$ 知，$\exists\eta_1\in\left(0,\xi_1\right)$ 使得 $g''(\eta_1)=0$，同理由 $g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=0$ 和 $\xi_1<\xi_2$ 知，$\exists\eta_2\in\left(\xi_1,\xi_2\right)$ 使得 $g''(\eta_2)=0$，

第三步：由 $g''(\eta_1)=0$，$g''(\eta_2)=0$ 和 $0<\eta_1<\xi_1<\eta_2<\xi_2<1$ 知 $\exists\xi\in(\eta_1,\eta_2)$，使得 $g'''(\xi)=0$

第四步：因 $g'(t)=f'(t)-2t-\dfrac{f(x)+1-x^2}{x^2(x-1)}(3t^2-2t)$，故

$$g''(t)=f''(t)-2-\frac{f(x)+1-x^2}{x^2(x-1)}(6t-2)$$

$$g'''(t)=f'''(t)-6\frac{f(x)+1-x^2}{x^2(x-1)},$$

第五步：由$0=g'''(\xi)=f'''(\xi)-6\dfrac{f(x)+1-x^2}{x^2(x-1)}$知，

$$f'''(\xi)=6\frac{f(x)+1-x^2}{x^2(x-1)},$$

即 $f(x)=-1+x^2+\dfrac{x^2\left(x-1\right)}{3!}f'''\left(\xi\right)$。

例 3．设 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\lim\limits_{x\to b-0}f(x)=A\in\mathbb{R}$，则 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$。

证 Case1 若 $a,b\in\mathbb{R}$，则作

$$g(x)=\begin{cases}A, x=a,b\\ f(x), x\in(a,b)\end{cases}。$$

则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，由罗尔定理即知 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$。

Case2 若 $(a,b)=(-\infty,+\infty)$，则作微分同胚 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\to(-\infty,+\infty)$，$x\mapsto\tan x$。令 $g(t)=f(\tan t), t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，则

$$\lim_{t\to-\frac{\pi}{2}+0}g(t)=A,\ \lim_{t\to\frac{\pi}{2}-0}g(t)=A。$$

且 $g(t)$ 在可导，故由 Case1 知，$\exists\eta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 使得 $g'(\eta)=0$。而

$$g'(\eta)=f'(\tan\eta)\frac{1}{\cos^2\eta}。$$

所以 $f'(\tan\eta)=0$，取 $\xi=\tan\eta$ 即可。

Case3 若 $(a,b)=(a,+\infty)$，作微分同胚 $(a,a+1)\to(a,+\infty), t\mapsto\dfrac{t}{a+1-t}$。令 $g(t)=f(\dfrac{t}{a+1-t}), t\in(a,a+1)$，以下与 Case2 类似可得。.

Case4 若 $(a,b)=(-\infty,b)$，同 Case3。

例 4. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有界且导数连续，又对于任意实数 x 有 $\left|f(x)+f'(x)\right|\le 1$，试证明：$\left|f(x)\right|\le 1$。

证 令 $F(x)=e^x f(x)$，则 $F'(x)=e^x[f(x)+f'(x)]$，于是 $F'(x)\le e^x$，即 $-e^x\le F'(x)\le e^x$。故 $-\int\limits_{-\infty}^{x} e^x dx\le\int\limits_{-\infty}^{x}F'(x)dx\le\int\limits_{-\infty}^{x}e^x dx$，即

$$-e^x\le e^x f(x)-\lim_{x\to-\infty}e^x f(x)=e^x f(x)\le e^x。$$

故 $-1\le f(x)\le 1$，即 $\left|f(x)\right|\le 1$。

例 5. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，其中 $a>0$ 且 $f(a)=0$。试证明：在 (a,b) 内必有一点 ξ，使

$$f(\xi)=\frac{b-\xi}{a}f'(\xi)。$$

证 令 $F(x)=(b-x)^a f(x)$，此函数显然在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $F(a)=F(b)=0$。根据罗尔定理：在 (a,b) 内必有一点 ξ，使得 $F'(\xi)=0$，即 $(b-\xi)^a f'(\xi)-a(b-\xi)^{a-1}f(\xi)=0$，故得 $f(\xi)=\dfrac{b-\xi}{a}f'(\xi)$。

例 6. 证明：$|\int_{2003}^{2004}\sin t^2 dt|<\dfrac{1}{2003}$。

证 令 $x^2=u$，则

$$\int_{2003}^{2004}\sin t^2dt=\int_{2003^2}^{2004^2}\frac{\sin u}{2\sqrt{u}}du=\frac{1}{2\sqrt{\xi}}\int_{2003^2}^{2004^2}\sin udu。$$

于是

$$|\int_{2003}^{2004}\sin t^2dt|=\left|\frac{1}{2\sqrt{\xi}}\int_{2003^2}^{2004^2}\sin udu\right|\le\frac{2}{2\sqrt{\xi}}<\frac{1}{2003}。$$

例 7．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'(x)$ 单调递减，

$f'(x)\ge m>0,\ (x\in[a,b])$，则

$$\left|\int_a^b\cos f(x)dx\right|\le\frac{2}{m}。$$

证 因 $y=f(x)$ 的反函数 $x=g(y)$ 存在，且 $g'(y)=\dfrac{1}{f'(g(y))}$。

$$\left|\int_a^b\cos f(x)dx\right|=\left|\int_{f(a)}^{f(b)}\cos y\frac{1}{f'(g(y))}dy\right|=\left|\frac{1}{f'(g(f(b)))}\int_{\xi}^{f(b)}\cos ydy\right|$$

$$\le\left|2\cdot\frac{1}{f'(g(f(b)))}\right|\le\frac{2}{m}.$$

作业：

练习 1 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上可微，且满足

$f(1)-2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)dx=0$。求证：在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使得

$$f'(\xi)=-\frac{f(\xi)}{\xi}。$$

练习 2 已知 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上二次连续可微, $f(1)=0$，

证明：$\left|\int_0^2f(x)\right|\le\dfrac{1}{3}M$，其中 $M=\max\limits_{x\in[0,2]}|f''(x)|$。

练习 3 设函数 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，在 $(1,2)$ 内可微，且 $f'(x)\neq 0$，证明：存在 $\xi,\eta,\zeta\in(1,2)$，使得：$\dfrac{f'(\zeta)}{f'(\xi)}=\dfrac{\xi}{\eta}$。

练习 4 设函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内有二阶导数，且 $f(a+1)=0$，$\lim\limits_{x\to a+} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$。求证在 $(a,+\infty)$ 内至少有一点 ξ，满足 $f''(\xi)=0$。