# 第三讲　　导数

**例 1.** 使得下列不等式对所有的自然数$n$都成立的最大的数$\alpha$和最小的数$\beta$：$(1+\frac{1}{n})^{n+\alpha} \le e \le (1+\frac{1}{n})^{n+\beta}$ 。

解：$(1+\frac{1}{n})^{n+\alpha} \le e \le (1+\frac{1}{n})^{n+\beta}$ 　等价于

$$(n+\alpha)\ln(1+\frac{1}{n}) \le 1 \le (n+\beta)\ln(1+\frac{1}{n})$$

所以　$\alpha \le \frac{1}{\ln(1+\frac{1}{n})} - n \le \beta$。令 $f(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}, x \in (0,1]$，则

$$f'(x) = -\frac{\frac{1}{1+x}}{\ln^2(1+x)} + \frac{1}{x^2} = \frac{(1+x)\ln^2(1+x) - x^2}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)}$$

再令 $g(x) = (1+x)\ln^2(1+x) - x^2, x \in [0,1]$，则

$g'(x) = \ln^2(1+x) + 2\ln(1+x) - 2x$，$g''(x) = [2\ln(1+x)]\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x} - 2$

$= \frac{2[\ln(1+x) - x]}{1+x} < 0$，故 $g'(x)$ 在 $[0,1]$ 上严格递减，$\therefore g'(x) < 0$，但 $g(0) = 0$，$\therefore g(x) < g(0) = 0, (x > 0)$，$(1+x)\ln^2(1+x) - x^2 < 0$。于是 $f'(x) < 0$，即 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 内严格递减。令 $x = \frac{1}{n}$，则 $\alpha \le f(x) \le \beta$。

$$\therefore \max\alpha = \inf_{x\in(0,1]} f(x) = \lim_{x\to 1}[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}] = \frac{1}{\ln 2} - 1；$$

$$\min\beta = \sup_{x\in(0,1]} f(x) = \lim_{x\to 0}[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}]$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x - \ln(1+x)}{x\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1 - \frac{1}{1+x}}{\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x+(1+x)\ln(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\ln(1+x)+1}=\frac{1}{2}。$$

**例 2**．设 $f(x)$在$[a,b]$上有定义，$x_0\in(a,b)$, $f(x)$在$x=x_0$处可导，且$\{a_n\},\{b_n\}$满足

（1）$a<a_n<x_0<b_n<b$ ；

（2）$a_n\to x_0, b_n\to x_0$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}=f'(x_0)。$$

**[分析]**

$$\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}-f'(x_0)=\lambda_n(\frac{f(b_n)-f(x_0)}{b_n-x_0}-f'(x_0))+$$

$+\mu_n(\frac{f(a_n)-f(x_0)}{a_n-x_0}-f'(x_0))$，其中$\lambda_n=\frac{b_n-x_0}{b_n-a_n},\mu_n=\frac{a_n-x_0}{b_n-a_n}$。

**例 3**．设 $f'(x)$在$\left(0,+\infty\right)$连续，且$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$

则$\exists c\in\left(0,+\infty\right)$使得 $f'(c)=0$.

**证**　由$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$知$\exists K>0$使得$\left|f(x)-A\right|<1(x>K)$，补充定义 $f(0)=A$，则 $f(x)$在$\left[0,K\right]$连续，从而 $f(x)$在$\left[0,K\right]$有界，即$\exists M_1>0$使得$\left|f(x)\right|\le M_1(x\in\left[0,K\right])$，令$M_2=\max\left\{1+\left|A\right|,M_1\right\}$，则$\left|f(x)\right|\le M_2(x>0)$。设 $f(x)$的上确界和下确界分别为$m$和$M$，若$m=M$，结论$\exists c\in\left(0,+\infty\right)$使得 $f'(c)=0$显然成立.，若$m<M$，则 $A\ne M$ 或 $A\ne m$。不妨设 $A\ne m$，则 $f(x)$的最小值为 $m$，设

$m=f(c)$，则 $f'(c)=0$。

**例 4**．设 $f\left(x\right)=arc\tan\dfrac{1-x}{1+x}$，求 $f^{(n)}\left(0\right)$。

**解** 因 $f'(x)=-\dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n}$，故

$$f(x)=f(0)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}x^{2n+1},$$

因此

$$f^{(n)}\left(0\right)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}, & n=0\\ 0, & n=2k\\ (-1)^{\frac{n+1}{2}}(n-1)! & n=2k-1\end{cases}\qquad (k\in\mathbb{Z}^+)。$$

**例 5**．设 $\lambda$ 是常数，试讨论方程 $x-\frac{\pi}{2}\sin x=\lambda$ 在开区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内根的个数。并证明你自己的结论。

**解** 只需讨论曲线 $y=x-\dfrac{\pi}{2}\sin x$ 与直线 $y=\lambda$ 的交点的个数。为此，设 $f(x)=x-\dfrac{\pi}{2}\sin x$

则 $f'(x)=1-\dfrac{\pi}{2}\cos x$，记 $x_0=\arccos\dfrac{2}{\pi}$，则

| X | 0 | $(0,x_0)$ | $x_0$ | $(x_0,\frac{\pi}{2})$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | - | 0 | + | |
| $f(x)$ | 0 | ↘ | $f(x_0)$ | ↗ | 0 |

易见，题给方程

当$\lambda < f(x_0)$或$\lambda > 0$时，在$(0,\frac{\pi}{2})$内没有根，

当$\lambda = f(x_0)$时，在$(0,\frac{\pi}{2})$内有且只有一个根，

当$\lambda \in (f(x_0),0)$时，在$(0,\frac{\pi}{2})$内有且只有两个根。

**例 6**．设函数 y=y(x)由方程$2y^3 - 2y^2 + 2xy - x^2 = 1$确定，求 y=y(x)的驻点，并判断它是否为极值点。

**解** 方程两边对 x 求导，得

$$6y^2y' - 4yy' + 2xy' + 2y - 2x = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ (*)$$

即

$$y' = \frac{x-y}{3y^2 - 2y + x}$$

令 y’=0，得 x=y 将 x=y 代入原方程得唯一驻点 x=1。

为求 y”（1），（*）式两边对 x 求导。得

$$(3y^2 - 2y + x)y'' + y'(6yy' - 2y' + 1) = 1 - y'$$

将 x-1 , y=1 , y’=0 代入上式得

$$y'(1) = \frac{1}{2} > 0$$

因此，x=1 为 y=y(x)的极小点， 且极小值为 y=1。

例 7．设 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, x^2+y^2 = 0 \end{cases}$

**证明** (1)偏导数处处存在，且 $f_x'$， $f_y'$有界；

(2) $f$ 在$(0,0)$不可微；

(3) $f'_x$，$f'_y$ 在 $(0,0)$ 处至少有一个不连续。

**证明**：(1) 当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}，\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

当 $(x,y)=(0,0)$ 时，

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to\infty}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to\infty}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0$$

故偏导数处处存在。
令

$$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta(0\leq r,0\leq\theta\leq 2\pi)$$

则

$$\left|\frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}\right|=\left|2\cos\theta\sin^3\theta\right|\leq 2,$$

$$\left|\frac{x^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right|=\left|\cos^4\theta-\sin^2\theta\cos^2\theta\right|\leq 2$$

(2) $f$ 在 $(0,0)$ 的全增量

$$\Delta f=\frac{\Delta x^2\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

$$\frac{\Delta f-0dx-0dy}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\frac{\Delta x^2\Delta y}{(\Delta x^2+\Delta y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

令 $\Delta x=\Delta y\to 0,$则

$$\frac{\Delta x^2\Delta y}{(\Delta x^2+\Delta y^2)^{\frac{3}{2}}}\to\frac{\sqrt{2}}{4}$$

故 $f$ 在$(0,0)$不可微。

（3）因 $f_x'$，$f_y'$在$(0,0)$处都存在，若 $f_x'$，$f_y'$在$(0,0)$处都连续，则 $f$ 在$(0,0)$可微，这与（2）矛盾。所以 $f_x'$，$f_y'$在$(0,0)$处至少有一个不连续。

**作业**

**练习 1.** 设 $f(x)$连续，$F(x)=\int_0^t dy\int_0^t f(x)dx$，求$F'(2)$.

**练习 2.** 设 $y=x^2e^x$是方程 $y''+ay'+by=ce^{hx}$的一个解，求常数 $a,b,c,h$。

**练习 3.** 设函数 f（x）=$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{e^{n(x-1)}+1}$，a，b，为常数，问 a，b 为何值时，f（x）在$(-\infty,+\infty)$上连续，可导 ？

**练习 4.** 求函数 f(x)= $\int_0^x\frac{2t-1}{t^2-t+1}dt$ 在[0，2]上的最大值与最小值。

**练习 5.** 设 $F(x)=\int_0^{\tan x} f(tx^2)dt$，其中 $f(x)$ 为连续函数，求 $F'(x)$，讨论 $F'(x)$ 的连续性。

**练习 6.** 设 $f(x)$ 连续可导，证明：

$$\int_0^1 dx\int_0^x \frac{f'(y)dy}{\sqrt{(1-x)(x-y)}}=\pi\left[f(1)-f(0)\right]。$$