一元函数极限

利用公式

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+C+\alpha_n \quad (\alpha_n \to 0)$$

例 1：求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+n})$ （答案：$\ln 2$）

借助 Stirling 公式

$$n!=\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n+\frac{\theta_n}{12n}} \quad (0\le\theta_n\le 1)$$

例 2：求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\prod\limits_{i=1}^{n}\frac{e^{1-\frac{1}{i}}}{(1+\frac{1}{i})^i}$ （答案：$\sqrt{2\pi}e^{-(1+C)}$）

1．3 O.Stolz 公式

一、 序列的情况

定理 1 （$\frac{\infty}{\infty}$型 Stolz 公式）

设$\{x_n\}$严格递增，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$。若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=\begin{cases}a\\+\infty\\-\infty\end{cases},$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\begin{cases}a\\+\infty\\-\infty\end{cases}。$$

定理 2 （$\frac{0}{0}$型 Stolz 公式）

设$n\to\infty$时，$y_n\to 0$，x_n严格递减趋向于 0。若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=a$，

则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=a$。

例 3：证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\frac{1}{p+1} \qquad (p\text{ 为自然数})$$

例 4：设 $S_n=\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n}\ln C_n^k}{n^2}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$。

例 5：设 $\lim\limits_{n\to\infty}n(A_n-A_{n-1})=0$。试证：极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_1+A_2+\cdots+A_n}{n}$$

存在时，

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}\frac{A_1+A_2+\cdots+A_n}{n}$$

例 6：求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{2}{2^2-1})^{\frac{1}{2^{n-1}}}(\dfrac{2^2}{2^3-1})^{\frac{1}{2^{n-2}}}\cdots(\dfrac{2^{n-1}}{2^n-1})^{\frac{1}{2}}$。

二、　函数极限的情况

定理 3：若 $T>0$ 为 常数，

1） $g(x+T)>g(x) \quad \forall x\ge a$；

2）当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to+\infty$，且 f,g 在 $[a,+\infty)$ 内闭有界；

3） $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}=l$。

则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l。$$

定理 4：设 $T>0$，且

1） $0<g(x+T)<g(x)\ (\forall x\ge a)$；

2） $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$；

3） $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}=l$。

则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l\text{。}$$

例 7：设 f 在 $[a,+\infty)$ 上有定义，内闭有界，

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{x^n}=l\text{，}$$

则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{n+1}}=\frac{l}{n+1}\text{。}$$

作业： P.33 EX3、EX7