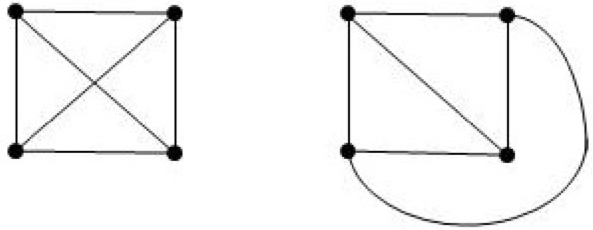
平面图与图的着色

平面图

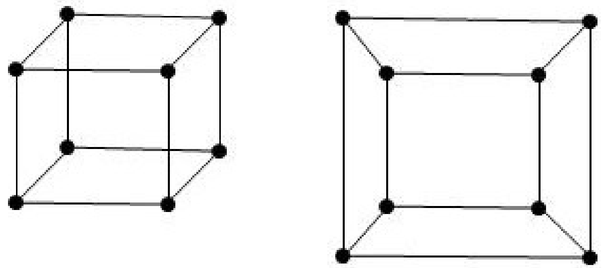
- 定义:图*G*若能画在平面上,使任何两条边都不交叉(除了端点处),就称*G*可嵌入平面,或称*G*是可平面(*planar*)图. 可平面图的一个平面嵌入(表示)称为平面(*plane*)图.
  - 一个图有很多种表示方法.
    - 在平面上画出是一种表示方法.
      - 可在平面上以边不交叉的方式画出,就是平面图
- 如果*G*是可平面图,那么它的任何导出子图也是可平面图.

平面图例

1.K_4是可平面图.



2



域

- 定义: 平面图的边将平面分割成域(*region*),或称面. 每个域由若干条边围成,内部不含任何结点及边. 包围域的诸边称为该域的边界.
  - 有且只有一个无界域:即平面图G外的区域.
  - 其他的域都叫做内部域.
- 如果两个域至少有一条共同的边界，就说它们是相邻的,否则是不相邻的.
  - 若e不是割边,它一定是某两个域的共同边界.

欧拉公式

- **定理(欧拉1852):**设$\boldsymbol{G}$是连通平面图**,**它的顶点数$\boldsymbol{n}$, 边数$\boldsymbol{m}$, 域数$\boldsymbol{d}$之间有

$$\boldsymbol{n - m + d = 2}$$

证:若G是树,则$d=1$,$m=n-1$,公式成立.

若G不是树,则取其支撑树T:每次去掉一条边以减少一个回路,即减少一个域.则$n-m+d$一直保持不变,直至达到支撑树.

- 推论:若平面图G有k个连通支,则

$$n - m + d = k - 1.$$

- 推论:对一般平面图G,恒有$n - m + d \geq 2$.

平面图

- 定理:设连通平面图G没有割边,且每个域的边界数至少是t,则

$$m \le (n-2)\, t \,/\, (t-2)$$

证:每条边是两个不同域的边界,故$td \le 2m$. 代入欧拉公式得$2m/t \ge m-n+2$,整理即得结论.

极大平面图

- 设G是$n \geq 3$的简单平面图, 若在任意不相邻结点v_i和v_j之间加入边(v_i,v_j)会破坏图的可平面性,就称G是极大平面图.
  – 注意:这里指的是加入边(v_i,v_j)本质上破坏可平面性.
  – 可能在一种平面表示下不能加,但在另一种表示下可以加.

极大平面图的性质

- 性质1: G是连通的.
- 性质2: G没有割边.
- 性质3: G的域的边界数都是3.
- 性质4: $3d = 2m$.
- 定理:极大平面图G中,有

  $$m = 3n - 6,\ d = 2n - 4.$$

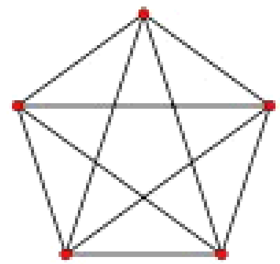
- 定理:简单平面图G满足

  $$m \le 3n - 6,\ d \le 2n - 4.$$

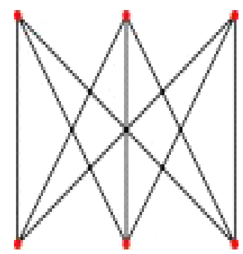
- 定理:简单平面图G中存在度小于6的结点.

非平面图

- 如果图G不能嵌入平面并满足任意两边只能在结点处相交,那么G就称为非平面图.
- 按平面性质进行划分,图分为两类:可平面图和非平面图.
- 定理: K_5是非平面图.
  - 记作$K^{(1)}$,是结点数最少的非平面图.



- 定理: $K_{3,3}$是非平面图.
  - 记作$K^{(2)}$,是n=6时边数最少的非平面图.



Kuratowski定理

- 定义:在$K^{(1)}$和$K^{(2)}$图上任意增加一些度为2的结点之后得到的图称为$K^{(1)}$型和$K^{(2)}$型图,统称为K型图.
  - K型图是非平面图.
- 定理(Kuratowski):G是可平面图 *iff* G不存在K型子图.

对偶图

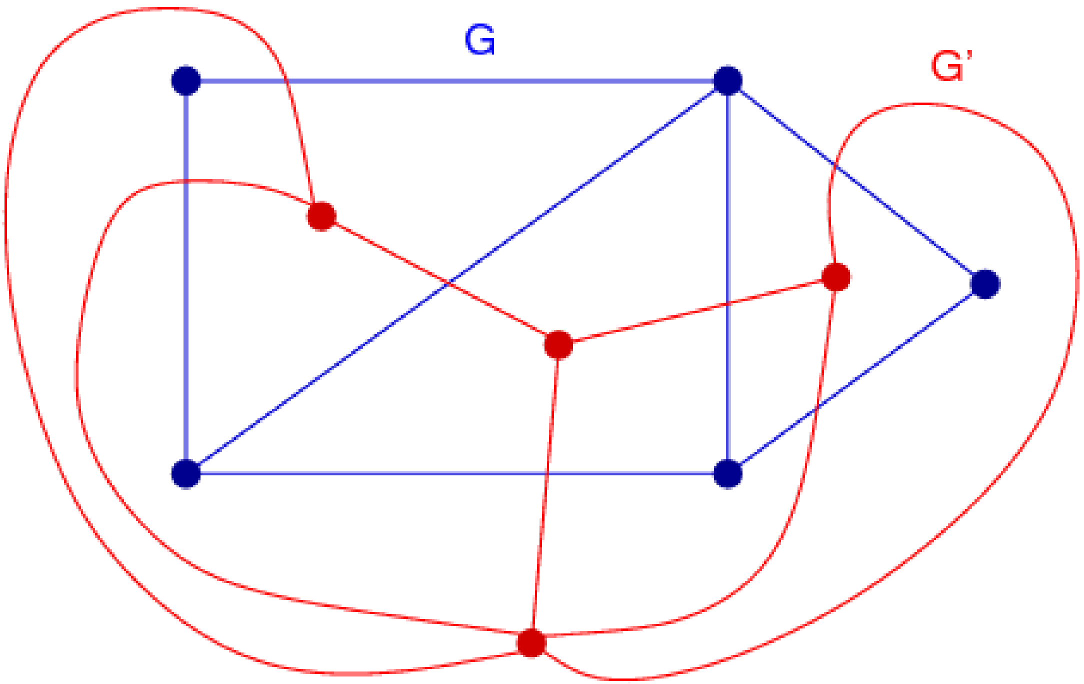
- 定义:给定图G,如下构造的图G^*,称为G的对偶图(*dual graph*).

  1.G中每个域f_i内放一个结点v^*_i;

  2.对应域f_i和f_j的公共边界e,作一条仅与e相交一次的边$e^* = (v^*_i, v^*_j) \in E(G^*)$;

  3.若e处于域f_i之内,则作v^*_i上仅与e相交一次的自环e^*.

例:对偶图



对偶图的性质

- 性质1:若G是平面图,则G必有对偶图G^*,且G^*是唯一的.
  - 可平面图的不同平面嵌入可有不同构的对偶图.
- 性质2: G^*是连通图.
  - 即使G不连通.
- 性质3:若G是连通平面图,那么$(G^*)^* = G$.
- 性质4:对连通平面图G及其对偶图G^*:

$$m = m^*, n = d^*, d = n^*$$

- 性质5:设C是平面图G的初级回路,S^*是G^*中与C的各边e_i对应的e^*_i的集合,则S^*是G^*的割集.

有对偶图的充要条件

- 定理:G有对偶图 *iff* G是平面图.

证:充分性即性质1.

必要性:即非平面图没有对偶图.由Kuratowski定理,非平面图一定含有$K^{(1)}$或$K^{(2)}$型子图.而$K^{(1)}$和$K^{(2)}$型子图是$K^{(1)}$和$K^{(2)}$图中增加了一些度为2的结点,因此若$K^{(1)}$和$K^{(2)}$图没有对偶图,那么$K^{(1)}$和$K^{(2)}$型,进而非平面图也没有对偶图.

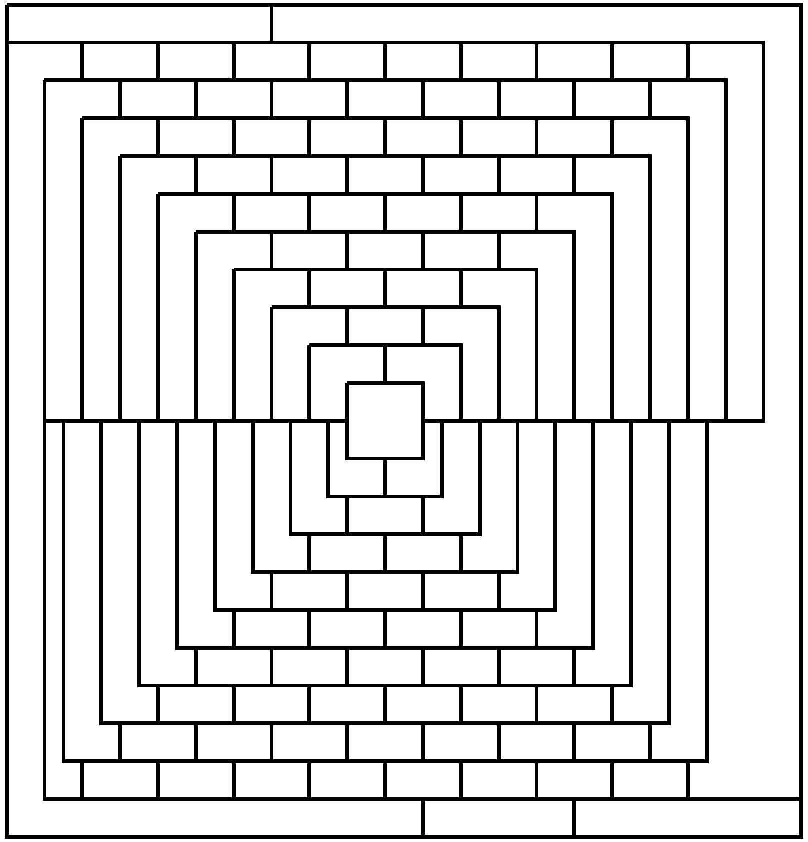
利用性质4易验证$K^{(1)}$和$K^{(2)}$图没有对偶图.

平面图的染色

- 染色问题:对平面图的域涂色,要求相邻域具有不同颜色.
- **定理:**每一个平面图***G***都是**5-**可着色的**.**
- 四色猜想:平面图的涂色只需四色?
  - 1976年四色定理得到证明.
  - 1996年Robertson, Sanders, Seymour和Thomas宣布了一个更简单的证明并于1997年发表.

趣题:Gardner的愚人节地图

- Martin Gardner:
  - *Scientific American*数学游戏栏目编辑
  - 1975年4月1日,他发表了声称只能用五色完成的地图.
  - 试试用四色?



End