随机分析前沿研究初探

马志明

（应用数学研究所　北京 100080）

提要　随机分析的前沿研究包括随机微分几何、无穷维随机分析、应用随机分析、Dirichlet 型理论、测度值随机过程、随机介质问题、量子概率等。本文着重论述概率论与分析、几何交叉的一些问题。

一、随机分析领域的一些前沿研究方向

概率论与随机分析是一个迅速发展的学科，它在理论上是基础数学理论的一个有生命力的分支，同时它本身又在众多的学科领域有广泛的应用。目前概率论与随机分析比较重要的前沿研究方向有：

1. 随机微分几何与无穷维随机分析　这是概率、几何、分析等不同学科分支相互交叉与渗透而产生的新研究方向，是国际概率论的一个重要研究热点。在这个研究方向存在有被国际学术带头人称为“长远目标”的重要课题，如环空间（Loop space）上的无穷维 Hodge-deRham 定理等。

2. 应用随机分析　包括金融数学中的随机分析、随机网络、随机模拟、神经网络、随机控制、滤波等。这个研究方向也是概率论与随机分析的重要研究热点，而且在国民经济中有应用价值。随着计算机科学的发展和我国经济改革的深化，这一研究方向将越来越重要。

3. Dirichlet 型理论　Dirichlet 型源于经典位势论。自 1971 年日本学者 Fukushima 首次由局部紧可分距离空间上的正则 Dirichlet 型构造出强 Markov 过程以来，迄今该理论已发展成为把解析位势论与随机分析有机地结合起来的一个交叉学科分支。由于它具有把分析问题和随机问题相互转化的优点，在位势理论、无穷维分析、随机微分方程、量子场论、伪微分算子、Markov 过程理论等许多相关领域都有应用，其应用范围还在扩大，已经成为随机分析领域中一个活跃的研究方向。

4. 测度值随机过程　测度值随机过程可以看成是无穷质点粒子系统的极限过程，它与非线性微分方程有联系。这也是近年来随机分析领域中一个活跃的研究方向。

5. 随机介质问题　随机介质问题与热力学、声学、流体力学等物理学科有密切联系，是一个很有意义的研究方向，同时也是难度较大的一个研究方向。由于这一研究方向具有很强的物理背景，必将受到随机分析学家越来越多的重视。

6. 量子概率　量子概率来源于量子物理，它提出了一些与传统概率不相同的思想方法。这是一个值得注意的新研究方向。

二、概率论与分析、几何相互交叉

1993 年夏季美国数学会在康乃尔大学主办了一个为期三周的研讨会。《美国数学会通讯》介绍这一研讨会时有这样一段话："最近几年在概率论与分析、几何、数学物理之间有振奋人心的交叉。这三个领域给概率论带来了丰富的研究课题。本次会议着重展现这一领域的最新成就并预示有希望的进一步研究方向。"事实的确如此，近几年来概率分析的作用不断扩大，日益渗透到确定性数学和理论物理的相关领域。在无穷维空间代替 Lebesgue 测度的基本测度常常是 Brown 运动的概率分布，或者 Brown 桥的概率分布(条件 Brown 运动的分布)。因此概率分析不可避免地介入到无穷维分析中。在随机分析中把这类配备有(条件)Brown 运动分布的空间称为 Wiener 空间。概率论在量子力学和量子场论中不可或缺的作用是众所周知的。概率论与随机分析还渗透到传统的确定性分析中，其原因是它有独特的长处。概率论的一个显然长处是他的直观性。概率的直观不同于物理的直观，它是建立在严格的数学基础之上。它不仅启发人们的思维，引导新的发现，而且它的证明也是十分严格的。概率论的另一个长处是它使得那些在分析和微分几何中通常只对光滑函数和曲线才有意义的重要运算有可能推广到一些极不光滑的函数和曲线上去。例如对 Brown 运动轨道的"微积分"和"随机水平提升"。概率论的这些优点使得近几年来一些分析学家逐渐转到随机分析的研究方向上。在这方面一个突出的例子是 P. Malliavin(法国科学院院士，J. Functional Ananlysis 主编)。他原来是泛函分析与微分几何专家，1976 年 P. Malliavin 建立了一套对 Brown 运动轨道泛函的微积分运算(他本人称之为随机变分学，现在称为 Malliavin 算法)。他和他的同行用随机分析方法证明了关于偏微分算子椭圆性的 Hörmander 定理，并用随机分析方法证明和推广了著名的 Atiyah-Singer 指标定理。目前，Malliavin 是国际上随机微分几何和无穷维随机分析的学术带头人。

三、随机微分几何与无穷维随机分析

随机微分几何与无穷维随机分析是概率、几何、分析等不同数学学科分支相互交叉与渗透而产生的新兴研究领域。该领域研究的问题与量子场论和理论物理密切相关。根据 D. Elworthy 在 1992 年欧洲随机分析圆桌会议上的报告，随机微分几何主要包括如下一些研究内容：(1)随机过程的微分几何；(2) 流形上的随机过程；(3) 微分几何与大范围分析的随机方法，包括用随机方法研究 Atiyah-Singer 指标定理等；(4) 被噪声干扰的动态系统；(5) 纯粹随机微分几何。无穷维随机分析包括 Malliavin 算法、Wiener 空间分析、环空间(loop space)的几何与分析、无穷微随机微分方程、测度值随机过程、拟正则 Dirichlet 型、白噪声分析、随机量子化问题等内容。随机微分几何和无穷维随机分析是国际概率论的一个重要研究热点。这个研究领域吸引了包括法国科学院院士 P. Malliavin 和日本著名数学家 Ito(Wolf 奖得主)在内的一批资深的和年轻的数学家。我国概率论专业的海外学子中有很大一部分在这个研究领域工作。在 1992 年的欧洲随机分析圆桌会议上，以及在 1993 年美国数学会主办的随机分析研讨会上，随机微分几何与无穷维随机分析都是热门话题。1994 年 10 月至 1995 年 8 月底将在英国 Warwick 举办"随机分析与相关课题"学术年活动。学术年的主要内容就是研讨随机微分几何与无穷维随机分析，其中有一个专门的研讨会讨论环空间上的分析与几何。

四、环空间上的分析与几何

环空间上的分析与几何是随机微分几何与无穷维随机分析这个研究领域中最有趣味的研究方向之一。令 G 为一有限维 Riemann 流形。令 $M = C(S^1; G)$，即 M 为由 S^1 到 G 的连续映射全体，我们称 M 为环空间(Loopspace)。直观地讲，环空间就是取值于 M 的所有形成环状的曲线组成的空间。这是一个具有物理背景的典型的无穷维非线性空间。在环空间 M 上可以自然地引入梯度算子∇与散度算子∇^*，可以考虑 Dirichlet 型算子$\nabla^*\nabla$。用随机分析的方法在 G 上构造出 Brown 运动后，可以把 Brown 运动在 M 上的条件分布 μ 看作 M 上的自然测度(取代有穷维流形上的 Riemann-Lebesgue 测度)。进一步可把 Dirichlet 型算子$\nabla^*\nabla$扩张为 $L^2(M,\mu)$ 上的自伴算子，并建立一个以$\nabla^*\nabla$为生成算子的 $L^2(M,\mu)$ 上 Dirichlet 型。新近，美国的 B. Driver，法国的 Leander，德国的 S. Albeverio 和 M. Röckner 等学者在 M 为基本环空间以及 M 为 R^d 上自由环空间的情形证明了$\nabla^*\nabla$联系一个拟正则 Dirichlet 型，从而应用拟正则 Dirichlet 型理论可在 M 上构造一个以$\nabla^*\nabla$为生成算子的扩散过程。这一结果不仅增进了人们对$\nabla^*\nabla$的了解，而且使得拟正则 Dirichlet 型和 Markov 过程理论在今后环空间的研究中有了用武之地。

不论从数学还是物理的角度，算子$\nabla^*\nabla$都是人们深入研究的对象。在数学文献中$\nabla^*\nabla$是无穷维 Ornstein-Uhlenbeck 算子，而在量子场论中$\nabla^*\nabla$是一种 Hamilton 算子。但是，人们对算子$\nabla^*\nabla$的性质还知之甚少，大量有趣的数学问题还等待着人们去研究和探讨。

环空间 M 上的梯度算子∇可以进一步推广为 M 上的微分形式。数学家在这里追求的一个长远目标是建立类似的 Hodge-deRham-小平邦彦定理。这是随机微分几何与无穷微随机分析领域的一个重要课题。这一课题实际处于拓扑、分析、几何、概率与物理的交点，因此成为不同分支学科数学家联合作战和显示实力的战场。

五、国内优势力量分析

在中国发展随机微分几何与无穷维随机分析有如下优势：(1) 我们在无穷维随机分析的某些研究方向，比如拟正则 Dirichlet 型理论、白噪声分析、拟必然分析等研究方向已处于国际研究水平。(2) 我们与国外同行交往密切，可随时了解国际科研动态。(3) 国内关于微分几何、泛函分析、随机分析等各分支学科的力量都比较强，有利于造就出跨学科的青年人才。(4) 我国的海外学子中有许多人在从事随机微分几何与无穷维随机分析的研究工作，这是一个可很好利用的人才库。

对一些重大数学难题的研究我们当然不能预言鹿死谁手，但我们应当而且有能力在随机微分几何和无穷维随机分析这个概率论的科研前沿领域占领一席之地。为此我们应该从现在开始就积极组织力量开展这方面的研究工作。