§4 分布函数

定义 设 $X(\omega)$ 是概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的一个随机变量，则称函数（一元实变实值）

$$F(x) = P(X \leqslant x) = P(\{\omega | X(\omega) \leqslant x\}), \quad -\infty < x < \infty$$

为 $X(\omega)$ 的概率分布函数。

容易看出，分布函数具有以下性质：

(1) $F(x)$ 单调非降；

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1;$

(3) $F(x)$ 右连续，且左极限存在；

(4) 称 $F(x-) \neq F(x)$ 的点 x 为跳跃点，则跳跃点只有可数个。

(5) 离散型随机变量的分布函数是阶梯函数。

定义 对于随机变量 X，如果存在可积函数 $p(x)$ 使得

$$F(x) = P(X \leqslant x) \int_{-\infty}^{x} p(t)dt$$

则称 X 为连续型随机变量，相应的，$p(x)$ 称为 X 的概率密度函数。

对于连续型随机变量 X，它取任何一个值 a 的概率为 0。

下面给出几个常用的连续型随机变量的概率密度函数。

(1) 均匀分布

称概率密度为

$$p(x) = \begin{cases} \lambda, & \text{当} a \leqslant x \leqslant b; \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

的随机变量 X 为区间 $[a, b]$ 上的均匀分布，记作

$$X \sim U[a, b].$$

容易看出，$\lambda = \dfrac{1}{b-a}$。均匀分布就是一维的几何概型。

(2) 指数分布

称概率密度为

$$p(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x \geqslant 0 \quad (\lambda > 0); \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

的随机变量 X 为服从参数为 λ 的指数分布。

容易验证，指数分布有如下性质：

$$P(X \geqslant a + b | X \geqslant a) = P(X \geqslant b).$$

也就是说，跟几何分布一样，指数分布具有无记忆性。不同的是，指数分布是连续型的随机变量。

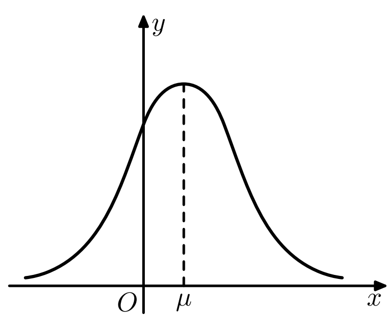
(3) 正态分布

如果随机变量 X 的概率密度函数为

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} (-\infty < x < \infty),$$

其中参数 μ 可以为任何实数，而参数 $\sigma > 0$，则称 X 服从参数为 μ, σ 的正态分布，记作 $X \sim N(\mu, \sigma)$。

正态分布的图形如下：



容易看出，图形是关于直线 $x = \mu$ 对称的。故 $P(X \leqslant \mu - a) = P(X \geqslant \mu + a)$。

容易证明，若 $X \sim N(\mu, \sigma)$，$Y \sim N(0, 1)$，则

$$P(a < X < b) = P(\frac{b - \mu}{\sigma} < Y < \frac{a - \mu}{\sigma}).$$

于是在计算的时候，只需要知道 $N(0, 1)$ 的分布即可。$N(0, 1)$ 的分布函数记为 $\Phi(x)$。

正态分布是统计中应用最多的分布，很多测量误差，观察指标都是服从正态分布。第五章从理论上证明了这一点。具体细节在第五章里讨论。

(4) 伽玛分布

如果随机变量 X 的概率密度为

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\beta x}, & x > 0 \quad (\alpha > 0, \beta > 0); \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases}$$

则称 X 服从参数为 (α, β) 的伽玛分布，记作 $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$。

伽玛分布是一个很大的分布类，指数分布是它的一个子类 $(\alpha = 1)$。另外，在统计学中常见的 χ^2 分布类也是它的一个子类 $\big(\alpha = \dfrac{n}{2}, \beta = \dfrac{1}{2}\big)$。

§5 随机变量函数及概率其分布

这里要讨论的问题是，已知 $X(\omega)$ 的概率分布，求

$$Y(\omega) = f(X(\omega))$$

的概率分布，其中，$f(\cdot)$ 是已知的一元实值实变函数。

在这里只讨论几个例子，更一般的讨论在下一章一起讨论。

例 5.1 已知 $X \sim N(\mu, \sigma)$，求 $Y = aX + b$ 的分布函数 $(a > 0)$。

解

$$\begin{aligned} F_Y(y) = P(Y \leqslant y) &= P(aX + b \leqslant y) \\ &= P(X \leqslant \frac{y-b}{a}) \\ &= F_X(\frac{y-b}{a}). \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} F'_Y(y) &= F'_X(\frac{y-b}{a}) \cdot \frac{1}{a} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} a\sigma} \quad \exp\big\{ - \frac{(y - a\mu - b)^2}{2a^2\sigma^2} \big\}. \end{aligned}$$

也就是说，$Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$，即正态分布经过线性变换之后还是正态分布。特别的，取 $Y = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$，有 $Y \sim N(0, 1)$。

例 5.2 $X \sim N(0,1)$，求 $Y = X^2$ 的分布。

解 当 $y \leqslant 0$ 时，显然有 $F_Y(y) = 0$。当 $y > 0$ 时，

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) = P(Y \leqslant y) &= P(X^2 \leqslant y) \\
&= P(-\sqrt{y} \leqslant X \leqslant \sqrt{y}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{y} x^{-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

可知其密度函数为

$$
p_Y(y) = \begin{cases} y^{-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}, & y > 0; \\ 0, & y \leqslant 0, \end{cases}
$$

也就是说，$Y \sim \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$。

例 5.3 设 $X \sim U(0,1)$，求 $Y = \Phi^{-1}(X)$ 的分布。

解

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \leqslant y) = P(\Phi^{-1}(X) \leqslant y) \\
&= P(X \leqslant \Phi(y)) = \Phi(y).
\end{aligned}
$$

这表明 $Y \sim N(0,1)$。