第二章 随机变量及其概率分布

§1 随机变量

定义 设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是一概率空间，$X(\omega)$ 是定义在 Ω 上的实值函数，如果对任意实数 x，都有

$$\{\omega | X(\omega) \leqslant x\} \in \mathcal{F},$$

则称 $X(\omega)$ 是 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的一个随机变量。也就是说，随机变量是从概率空间到实数域 $\mathbb{R}$ 上的可测映射。

有些事件本身就与数字有关，如身高、体重，有些则是为了方便处理而赋值，如人口普查中男女的性别。

下面给出几个例子。

例 1.1 抛掷一枚硬币，则

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega = \omega_1 = \text{“国徽朝上”}; \\ 0, & \omega = \omega_1 = \text{“国徽朝下”} \end{cases}$$

是一个随机变量。

例 1.2 抛掷两枚硬币，则

$$X(\omega) = \text{“国徽朝上的硬币数”};$$
$$Y(\omega) = \text{“国徽朝下的硬币数”}$$

都是随机变量。

例 1.3 重复抛掷一枚硬币，直到第一次出现国徽朝上，则

$$X(\omega) = \text{“所需抛掷次数”}$$

是一个随机变量。

例 1.4 某公共汽车站每隔 5 分钟有一辆汽车通过，如果某人到达该车站的时间是随机的，那么，他等车的时间 $X(\omega)$ 是一个随机变量。

对于具体的随机变量，通常分为两类进行具体讨论。如果一个随机变量 $X(\omega)$ 可能取的值是可数个，则称 $X(\omega)$ 是离散型随机变量。非离散型的随机变量范围很广，其中最重要的也是实际问题中最常见的是连续型随机变量。在这里，先讨论离散型的随机变量。

§2. 离散型随机变量

离散型随机变量 $X(\omega)$ 只取可数个值，记为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$。相应的，它取各个值的概率分别记为

$$p_i = P(X(\omega) = x_i) = P(\{\omega : X(\omega) = x_k\}),\ i = 1, 2, \cdots.$$

称 $p_1, p_2, \cdots$ 为 X 的概率分布列, 它完整的表示了 X 取值的概率分布情况。

下面介绍几种常见的概率分布及其性质。

(1) 两点分布（*Bernoulli* 分布）

如果随机变量 X 的分布如下：

$$P(X = 1) = p,\ P(X = 0) = q,$$

其中 $0 < p < 1,\ q = 1 - p$, 则称 X 服从参数为 p 的两点分布。

两点分布是最简单的一个分布类。任何一个只有两种可能结果的随机变量，比如人的性别，明天是否下雨等，都可以用两点分布来描述。

(2) 二项分布

如果随机变量 X 的分布如下：

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n,$$

其中 $0 < p < 1,\ q = 1 - p$, 则称 X 服从参数为 (n, p) 的二项分布，或者用记号

$$X \sim B(n, p)$$

来表示。

显然，参数为 p 的两点分布，就是二项分布中的一个子类 $B(1, p)$。

来看一下下面的例子。

例 2.1 某射击手击中 10 环的概率为 0.4，现独立的射了 5 发，则他恰有两次命中的 10 环的概率为

$$p = C_5^2 \cdot 0.4^2 \cdot 0.6^3.$$

结果刚好是二项分布的形式。现在给出一个比较一般的问题：

已知单次试验中事件 A 发生的概率是 p，那么 n 次重复独立试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率就是

$$P(\text{事件}A\text{恰发生 }k\text{次}) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n.$$

因此，在 n 次重复独立试验中，记随机变量

$$X = A\text{发生的次数}.$$

则 $X \sim B(n, p)$。

(3) 泊松（$Poisson$）分布

如果随机变量 X 的概率分布如下：

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-k}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots (\lambda > 0),$$

则称 X 服从参数为 λ 的泊松分布，记作 $X \sim P(\lambda)$。

对于二项分布，我们考虑下面的极限情况：

$$np = \lambda, \quad n \to \infty.$$

此时，

$$\begin{aligned} C_n^k p^k q^{n-k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right) \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \cdot \frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k} \\ &\to \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda} \quad (n \to \infty) \quad , \end{aligned}$$

即

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \mathrm{e}^{-k}, \quad k = 1, 1, 2, \cdots.$$

用类似的推导可以得到下面的结果：

若 $np \to \lambda (\lambda > 0, n \to \infty)$，则有

$$C_n^k p^k q^{n-k} \to \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \mathrm{e}^{-k} \quad (n \to \infty) \quad ,$$

即泊松分布是二项分布当 $np \to \lambda\ (n \to \infty)$ 情况下的极限分布。

利用这个结果，可用泊松分布来作二项分布的近似计算。

(4) 几何分布

在事件 A 在单次试验中发生的概率为 p 的独立重复试验中，记

$$X = A\text{首次发生时的试验次数},$$

不难验证，X 具有如下的概率分布：

$$P(X=k) = q^{k-1}p, \quad k = 1, 2, \cdots,$$

这个概率分布称为几何分布。

几何分布有无记忆性，也就是说，在前 m 次试验中 A 都一直没有发生的条件下，等到 A 发生所需要的试验次数 X^* 跟 X 分布相同。而且，可以证明，在取值为正整数的离散型分布中，几何分布是唯一的无记忆性的分布。

(5) 超几何分布

设一堆同类产品共 N 个，其中有 M 个次品，现从中任取 n 个（为方便记，假定 $n \leqslant N-M$），则这 n 个中所含的次品数 X 是一个离散型随机变量，其概率分布如下：

$$P(X=m) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}, \quad m = 0, 1, 2, \cdots, l,$$

其中 $l = min(M, n)$。

这个概率分布称为超几何分布。

下面看超几何分布的极限情况。对于任意给定的 $n, m(- \leqslant m \leqslant n)$，如果当 $N \to \infty$ 时，$M/N \to p > 0$，也就是说，产品总数趋向于无穷而次品占的比例趋向于 p，则有

$$\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} \to C_n^m p^m q^{n-m} \quad (N \to \infty).$$

证 将左端三个组合数分别按组合公式展开，然后整理取极限即得。

(6) 负二项分布

在独立重复试验中，事件 A 发生的概率为 p，对给定的 r，考虑

$$X = A\ \text{第}\ r\ \text{次发生时的试验次数},$$

不难验证，X 具有如下的概率分布：

$$P(X=k)=C_{k-1}^{r-1}q^{k-r}p^r,\quad k=r,r+1,\cdots.$$

现在我们规定

$$Y=X-r,$$

考虑 Y 的概率分布，对于自然数 k，

$$P(Y=k)P(X=k+r)=C_{k+r-1}^{r-1}q^kp^r.$$

Y 的分布称为参数为 (r,p) 的负二项分布。

可以看出，上面的 X 的分布是 r 个独立的几何分布的和。

考虑负二项式 $(1-x)^r$ 的 $Taylor$ 展开式：

$$\begin{aligned}(1-x)^r &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-r)(-r-1)\cdots(-r-(k-1))}{k!}(-x)^k\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(r+k-1)\cdots(r+1)r}{k!}x^k\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}C_{k+r-1}^{r-1}x^k,\end{aligned}$$

这也就是称为负二项分布的原因。

§3 Poisson 过程

用 $X(t)$ 表示从 0 开始，某特定事件发生的总次数，就可以称该过程为计数过程。对于计数过程，有

(1) $X(t)$ 是非负整数；

(2) 任意 $0\leqslant t_1\leqslant t_2$，有

$$X(t_1)\leqslant X(t_2).$$

实际上，这里的 $X(t)$ 应该写成 $X(t,\omega)$.

定义 称计数过程 $X(t)$ 为具有参数 λ 的 $Poisson$ 过程，如果

(1) $X(0)=0$;

(2) 对任意的 $0\leqslant t_1\leqslant t_2\cdots\leqslant t_n$,

$$X(t_2)-X(t_1),X(t_3)-X(t_2),\cdots,X(t_n)-X(t_{n-1})$$

是相互独立的 (独立增量性);

(3) 对任意的 $s,t\geqslant 0$, 有

$$X(s+t)-X(s)\sim P(\lambda t),$$

即服从参数为 λt 的 $Poisson$ 分布。

$Poisson$ 过程有一个等价的定义如下:

设计数过程 $\{X(t),t\geqslant 0$ 满足

(1) $X(0)=0$;

(2) 具有独立增量性;

(3) 对任意的 $s,t\geqslant 0$, $X(s+t)-X(s)$ 的分布与 s 无关 (时齐性);

(4) 对任意的 $s,t\geqslant 0$, 有

$$P(X(t+\triangle t)-X(t)=1)=\lambda\triangle t+o(\triangle t),$$

$$P(X(t+\triangle t)-X(t)\geqslant 2)=o(\triangle t),$$

则 $\{X(t),t\geqslant 0\}$ 为一参数为 λ 的 $Poisson$ 过程。

下面证明两个定义的等价性。从第一个定义推出第二个是显然的, 只需证明第二个能推出第一个。

记 $p_k(t)=P(X(t)=k)$, 则对任意的 $\triangle t>0$, 有

$$\begin{aligned}
p_k(t+\triangle t) &= P(X(t+\triangle t)=k)\\
&= P(X(t)=k,X(t+\triangle t)=k)\\
&\quad +P(X(t)=k-1,X(t+\triangle t)=k)\\
&\quad +P(X(t)\leqslant k-2,X(t+\triangle t)=k)\\
&= P(X(t)=k,X(t+\triangle t)-X(t)=0)\\
&\quad +P(X(t)=k-1,X(t+\triangle t)-X(t)=1)\\
&\quad +P(X(t+\triangle t)=k,X(t+\triangle t)-X(t)\geqslant 2).
\end{aligned}$$

由 (2)(3)(4) 可知

$$\begin{aligned} p_k(t) &= P(X(t)=k)P(X(t+\triangle t)-X(t)=0) \\ &\quad +P(X(t)=k-1)P(X(t+\triangle t)-X(t)=1) \\ &\quad +P(X(t+\triangle t)=k, X(t+\triangle t)-X(t)\geqslant 2 \\ &= p_k(t)(1-\lambda\triangle t)+p_{k-1}(t)\cdot\lambda\triangle t+o(\triangle t). \end{aligned}$$

于是有

$$p_k(t+\triangle t)-p_k(t)=-p_k(t)\lambda\triangle t+p_{k-1}(t)\lambda\triangle t+o(\triangle t),$$

$$p_k^{'}(t)=-\lambda p_k(t)+\lambda p_{k-1}(t),\quad k\geqslant 1.$$

当 $k=0$ 时，同上分析有

$$p_0^{'}(t)=-\lambda p_0(t).$$

可以解出

$$p_0(t)=\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

再用归纳法就可以推出 $p_k(t)$：

$$p_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda t},\quad k=0,1,2,\cdots.$$

容易验证，所求出的分布满足第一个定义。故两个定义是等价的。