

中国科学院研究生院
2012 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称：概率论与数理统计

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟.
 2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效.
-

1 (每小题 10 分, 共 20 分) 有一个均匀对称的骰子, 每面被涂成白色或黑色, 抛掷后出现白色的概率为 p ($0 < p < 1$), 现在抛掷这枚骰子, 直到出现白色为止. 问:

- (a) 上述骰子只需被抛掷最多 3 次的概率是多少?
- (b) 以 X 记骰子需要被抛掷的次数, X 的期望是多少? (请给出详细计算步骤)

2 (每小题 10 分, 共 20 分) 设平面上有无数条距离为 1 的等距平行线, 随机地向平面投掷一根长度为 l ($l \leq 1$) 的针, 记 X 为针的中心与最靠近它的平行线之间的距离, φ 为针与最靠近它的平行线的夹角, X 服从 $[0, \frac{1}{2}]$ 上的均匀分布, φ 服从 $[0, \pi]$ 上的均匀分布.

- (a) 试求针与线相交的概率;
- (b) 设计一个投针实验用以估计圆周率 π .

3 (共 15 分) 有一个实验需要三个步骤才能完成, 第一个步骤能按时完成的概率为 0.7, 已知第一个步骤完成的条件下, 第二个步骤能按时完成的概率为 0.8,

前两个步骤能按时完成的条件下, 第三个步骤能按时完成的概率为 0.9, 问前两个步骤能按时完成, 但第三个步骤却失败的概率是多少?

4 (共 15 分) 一个盒子中有 5 个红球和 8 个蓝球, 从中无放回地抽 3 个球, 设 X 是 3 次中得到红球的次数, Y 是 3 次中得到蓝球的次数, 试求 X 与 Y 的协方差 $\text{cov}(X, Y)$.

5. (共 20 分) 设 X 和 Y 是两个相互独立的服从同一指数分布 (参数为 λ) 的随机变量, 现记:

$$Z = \frac{\min(X, Y)}{\max(X, Y)}.$$

任意给定 $c \in (0, 1)$, 试求概率 $P(Z \leq c)$.

6. (每小题 15 分, 共 30 分) 植物学家通常假定野外每单位面积的区域上有某种植物的个数服从泊松分布, 现在考察 n 个互不叠交的面积分别为 R_1, R_2, \dots, R_n 的区域, 假定每个单位面积上出现雪松的平均个数是 λ .

- (a) 试求 λ 的极大似然估计;
- (b) 该估计是否无偏? 为什么?

7. (每小题 10 分, 共 30 分) 许多患者常希望医生告知药物的非专利名, 以便节省医疗开销. 现有一个调查结果: 有人访问了 102 名医生, 其中有 47 人知道美沙酮这一药物的非专利名. 这是否说明少于一半的医生知道这一事实呢? 现在作一个检验水平为 0.01 的假设检验, 设 p 为医生中知道美沙酮的非专利名的比例.

$$H_0 : p = 0.5, \quad H_a : p < 0.5.$$

问：(a) 检验统计量是什么？为什么 n 充分大时它近似服从正态分布，请给出你所知道的理由；

(b) 根据调查数据，我们是否能拒绝 H_0 ？

(提示： $z_{0.01} = 2.33$, 即 $1 - \Phi(2.33) = 0.01$, $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数)；

(c) 如果实际比例是 0.4，请问犯第二类错误的概率是多少？

(提示：可将 $\sqrt{102}$ 近似算作 10， $\sqrt{6}$ 近似算作 2.45， $\Phi(0.34) = 0.6631$) .