2 复合函数偏导数的链式法则

我们来讨论多元复合函数的求导公式，对二元函数可导出如下的公式.

设 $u=f(x,y)$,而 x,y 又是自变量 s,t 的函数

$$x=\varphi(s,t), y=\psi(s,t),$$

此时,若 $\frac{\partial x}{\partial t},\frac{\partial y}{\partial t}$ 及 $\frac{\partial x}{\partial s},\frac{\partial y}{\partial s}$ 在某点 (s,t) 都存在,而$f(x,y)$在相应于 (s,t) 的点 (x,y) 可微,则成立公式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

及

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s},$$

这个公式称为求复合函数偏导数的链式法则.

下面讲几个特殊情形.

若$u=f(x,y)$,而 x,y 依赖于一个变量 t ,即

$$x=\varphi(t), y=\psi(t),$$

则有 $$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

再有,若 x,y 是自变量 s,t 的函数,而函数 u 除随 x,y 而变化外还依赖于 t ,即

$$u=f(x,y,t);x=\varphi(s,t), y=\psi(s,t),$$

那么,就有 $$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

等式右边的最后一项,我们有意识地把它写成$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)$.为的是免得它与等式左边的 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 混淆起来.右端的$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)$是表示在函数$u=f(x,y,t)$中把 x,y 看做常数,对 t 求偏导数,而左端的 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 是表示在$u=f(\varphi(s,t),\psi(s,t),t)$中把 s 视为常数,对 t 求偏导数,二者切不可混淆.

例1　设 $u=e^x\sin y, x=2st, y=t+s^2$,求 u_s,u_t.

例2　设 $z=f(x,y)$可微, $y=\varphi(x)$的导数 $\varphi'(x),\varphi''(x)$存在,求 $z=f(x,\varphi(x))$ 关于 x 的一阶与二阶导数.

例3　设 $u=f(x^2y,\frac{y}{x})$,求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

例4　已知 $u=u(x,y)$,在极坐标 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ 变换下,证明

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$