第一章 集合

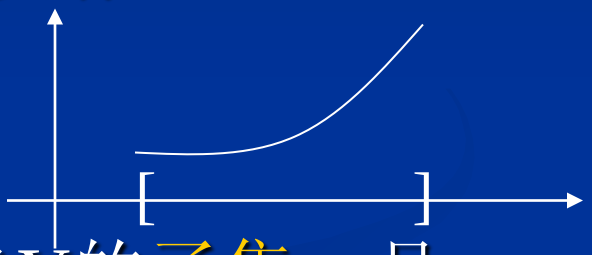
第二节 对等与基数

主讲人：孙明保

1 映射的定义

定义1：设X,Y是两个非空集合，若依照对应法则 f,对X中的每个x，均存在Y中唯一的y与之对应，则称这个对应法则 f 是从 X 到 Y 的一个映射，

记作 f: X→Y



或：设X,Y是两个非空集合，f是X×Y的子集，且对任意x∈X，存在唯一的y ∈Y使(x,y) ∈ f，则f 是从 X 到 Y的一个映射

注1：集合，元素，映射是一相对概念

注2：像，原像，像集，原像集，映射的复合，单射，满射，一一映射（双射）

例

1、 定积分运算 $\int_a^b$ 为从[a,b]上的可积函数集到实数集的映射 (函数,泛函,求导, 变换)

2、 实数的加法运算+: R×R→R (群,环,域)

3、 集合的特征函数 $\chi_A : X \to \{0,1\}$

（集合A与特征函数互相决定）

称 $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$ 为集A的特征函数

2 集合运算关于映射的性质（像集）

定理1：设$f:X\to Y, A, B, A_\alpha(\alpha\in\Gamma)$是$X$的子集，

称$\{f(x):x\in A\}$为A的像集，记作$f(A)$,则有：

1)$A\subset B\Rightarrow f(A)\subset f(B)$;

2)$f(A\bigcup B)=f(A)\bigcup f(B)$,一般地有：$f(\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha)=\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}f(A_\alpha)$;

3)$f(A\bigcap B)\subset f(A)\bigcap f(B)$,一般地有：$f(\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha)\subset\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma}f(A_\alpha)$;

证明的过程略

$f(A\bigcap B)=f(A)\bigcap f(B)$一般不成立,如常值映射，

等号成立当且仅当f为单射

集合运算关于映射的性质（原像集）

定理2：设$f: X \to Y, A \subset X, C, D, C_\alpha(\alpha \in \Gamma)$是$Y$的子集，称$\{x: f(x) \in C\}$为$C$的原像集，记作$f^{-1}(C)$($f$不一定有逆映射)，则有：

1)$C \subset D \Rightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$;

2) $f^{-1}(C \bigcup D) = f^{-1}(C) \bigcup f^{-1}(D)$,一般地有：$f^{-1}(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} C_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in\Gamma} f^{-1}(C_\alpha)$;

3) $f^{-1}(C \bigcap D) = f^{-1}(C) \bigcap f^{-1}(D)$,一般地有：$f^{-1}(\bigcap_{\alpha\in\Gamma} C_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in\Gamma} f^{-1}(C_\alpha)$;

4) $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$;

5) $f^{-1}(C^c) = [f^{-1}(C)]^c$;

6)$A \subset f^{-1}[f(A)]$;

7) $f[f^{-1}(C)] \subset C$;

注：6），7）一般不能使等号成立，6）等号成立当且仅当f为单射，7）等号成立当且仅当f为满射

证明的过程略

3 对等与势

1）设A,B是两非空集合，若存在着A到B的一一映射（既单又满），则称A与B对等,

记作 $A \sim B$

约定 $\Phi \sim \Phi$

注：称与A对等的集合为与A有相同的势（基数），记作 $\overline{\overline{A}}$

势是对有限集元素个数概念的推广

2)性质

1)自反性：$A \sim A;$

2)对称性：$A \sim B \Rightarrow B \sim A;$

3)传递性：$A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C;$

例

$$1)\ N \sim N_{奇数} \sim N_{偶数} \sim Z$$

…,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,...

1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,...

n

1,3,5,7,9,11,13,15,...

2n-1

2,4,6,8,10,12,14,16...

2n

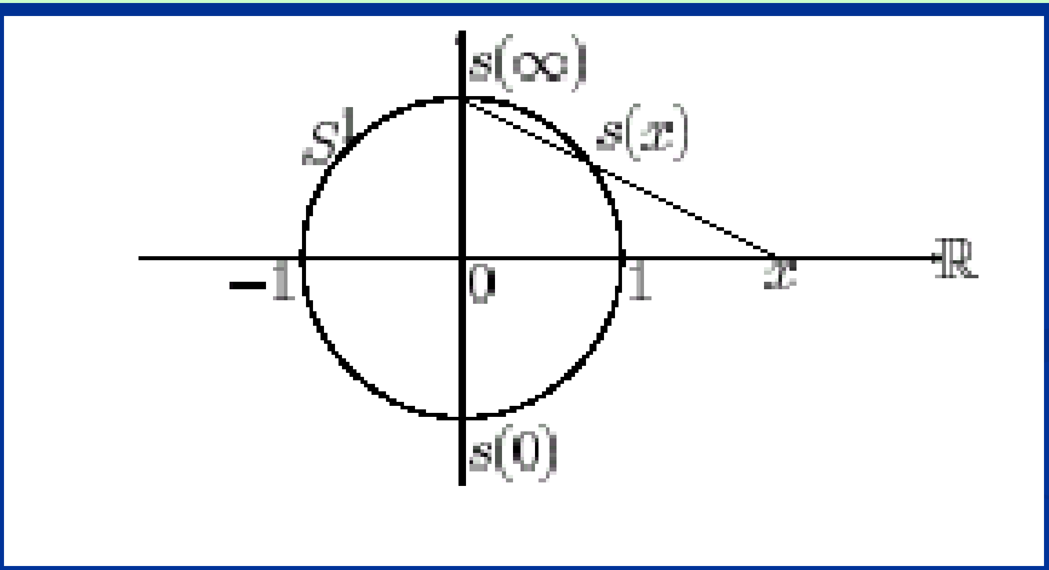
0,1, -1, 2, -2, 3, -3, 4 , -4,...

例

$2)(-1,1)\sim(-\infty,+\infty)$

$f: x \to tg(\frac{\pi}{2}x)$

3){去掉一个点的圆周}$\sim(-\infty,+\infty)$



有限集与无限集的本质区别：
无限集可与其某个真子集合有相同多的元素个数（对等）且一定能做到，而有限集则不可能。

基数的大小比较

1)若$A \sim B$,则称$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$;

2)若$A \sim B_1 \subset B$,则称$\overline{\overline{A}} \le \overline{\overline{B}}$;

相当于：A到B有一个单射，也相当于B到A有一个满射

3)若$\overline{\overline{A}} \le \overline{\overline{B}}$,且$\overline{\overline{A}} \ne \overline{\overline{B}}$, 则称$\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$

注：不能用A与B的一个真子集对等描述

如:$(-1,1) \sim (-1,1) \subset (-\infty,+\infty)$

但$(-1,1) \sim (-\infty,+\infty)$

4 Bernstein定理

设A, B是两个集，若有A的子集A^*，使$B \sim A^*$，及B的子集B^*，使$A \sim B^*$，则$A \sim B$.

即：若$\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}, \overline{\overline{B}} \leq \overline{\overline{A}}$，则$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$.)

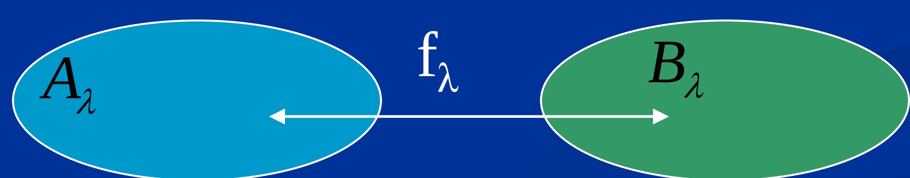
注：要证$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$，需要在$A$与$B$间找一个既单又满的映射；而要证$\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}$，只需找一个单射即可；从而我们把找既单又满的映射转化找两个单射。

例：由 $(-1,1) \subset [-1,1] \subset (-\infty,+\infty) \sim (-1,1)$ 可知 $(-1,1) \sim [-1,1]$，试问如何构造两者间的既单又满的映射。

Bernstein定理的证明

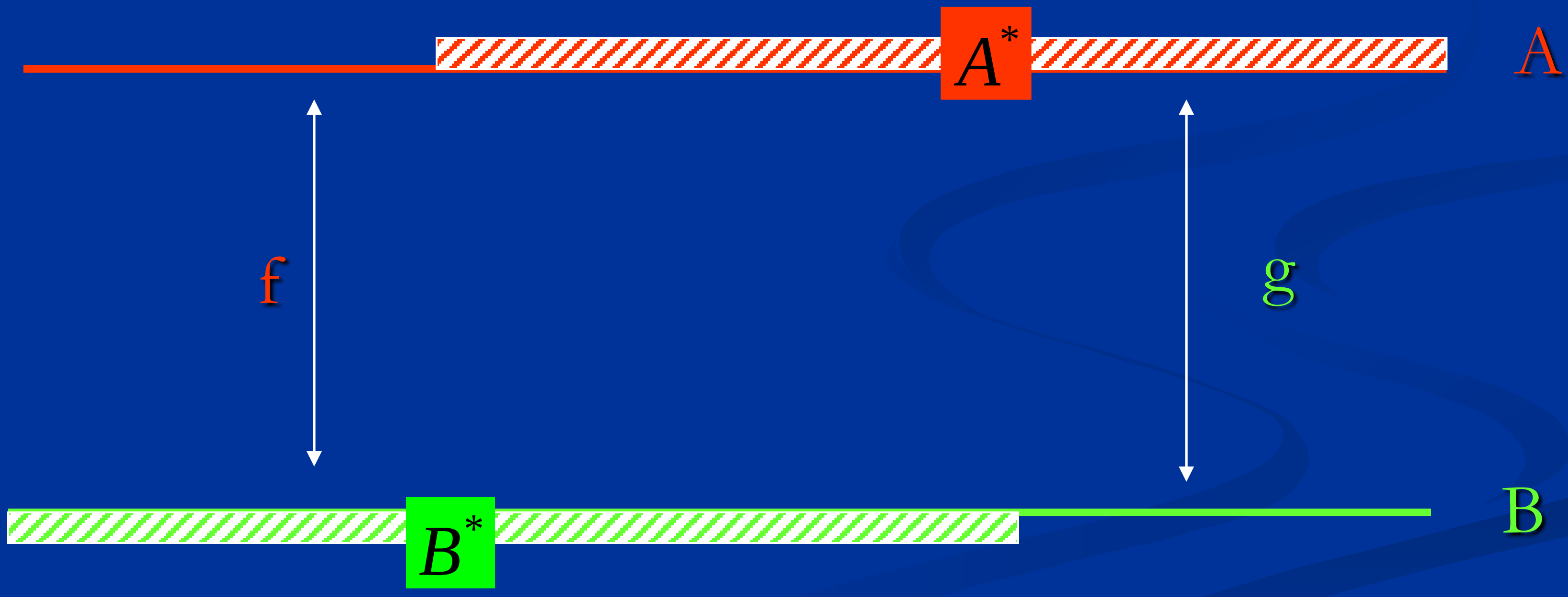
引理：设$\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$,$\{B_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$是两个集族,$\Lambda$是一个指标集，又$\forall\lambda\in\Lambda, A_\lambda\sim B_\lambda$,而且$\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$中的集合两两不交,$\{B_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$中的集合两两不交，那么：

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\sim\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda$$



证明:

根据题设，存在A到B^*上的一一映射f,以及B到A^*上的一一映射g.



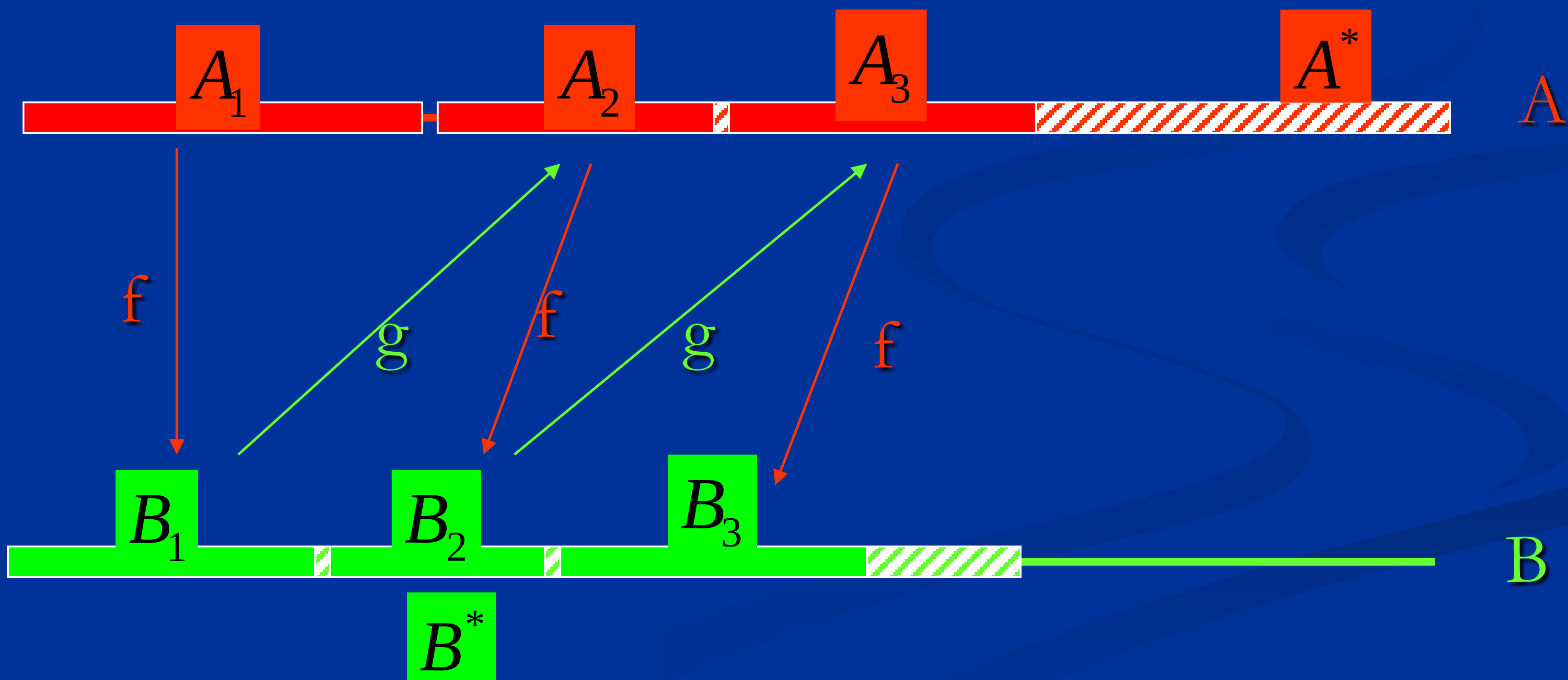
Bernstein定理的证明

令$A_1 = A \setminus A^*$　　　令$B_1 = f(A_1)$

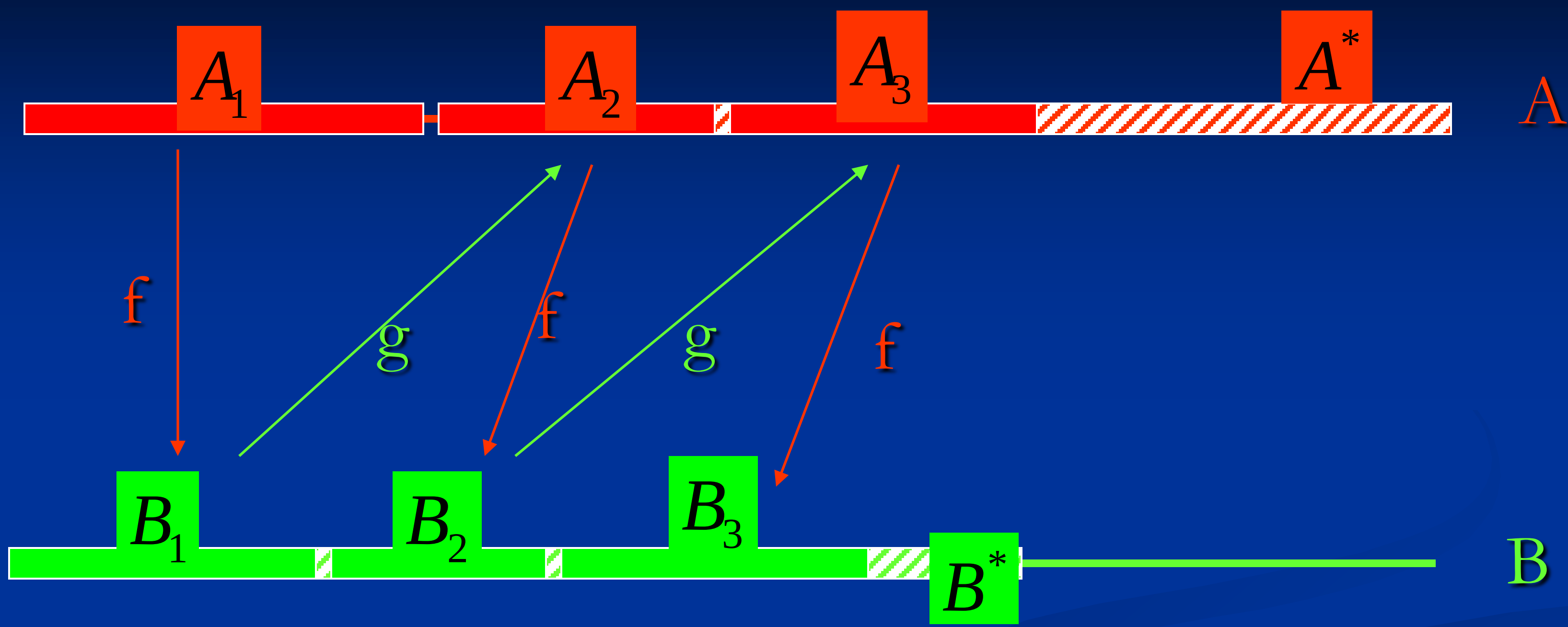
$A_2 = g(B_1)$　　　$B_2 = f(A_2)$

$A_3 = g(B_2)$　　　$B_3 = f(A_3)$

$\cdots$　　　$\cdots$



Bernstein定理的证明



由$g(B)=A^*$知$A_2=g(B_1)\subset A^*$,而$A_1=A\setminus A^*$，故A_1与A_2不交

从而A_1,A_2在f的象B_1,B_2不交

B_1,B_2在g下的象A_2,A_3不交

由$A_3\subset A^*$,知A_1与A_3不交,故A_1,A_2,A_3两两不交

从而A_1,A_2,A_3在f下的象B_1,B_2,B_3也两两不交,……

Bernstein定理的证明

从而$A_1, A_2, A_3, \cdots$两两不交，$B_1, B_2, B_3, \cdots$也两两不交

而且$A_n \overset{f}{\sim} B_n (n=1,2,\cdots)$，所以$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \overset{f}{\sim} \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$

另外由$B_k \overset{g}{\sim} A_{k+1} (k=1,2,\cdots)$，可知$\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \overset{g}{\sim} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{k+1}$

又$B \overset{g}{\sim} A^*$，所以$B \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \overset{g}{\sim} A^* \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{k+1}$

此处都是关于映射g，
如果不是同一映射，
则不一定成立.

$$A^* \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{k+1} = (A \setminus A_1) \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{k+1} = A \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

$$\therefore B \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \sim A \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

$$\therefore A = (A \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \cup (\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \sim (B \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k) \cup (\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k) = B$$