# §2　一致收敛函数列和函数项级数的性质（ 4 课时 ）

## 一.　　一致收敛函数列极限函数的解析性质:

### 1.　　连续性:

**Th 1**　设在 $\mathbf{D}$ 上 $f_n \rightrightarrows f(x)$ ,且对 $\forall\ n$ ,函数 $f_n(x)$ 在 $\mathbf{D}$ 上连续 ， $\Rightarrow$ $f(x)$ 在 $\mathbf{D}$ 上连续.

**证**　( 要证 ：对 $\forall x_0 \in \mathbf{D}$， $f(x)$ 在点 $x_0$ 连续 . 即证：对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当

$|\ x - x_0\ | < \delta$ 时，$\Rightarrow$ $|\ f(x) - f(x_0)\ | < \varepsilon$ . ）

$$|\ f(x) - f(x_0)\ | \le |\ f(x) - f_n(x)\ | + |\ f_n(x) - f_n(x_0)\ | + |\ f_n(x_0) - f(x_0)\ | .$$

估计上式右端三项. 由一致收敛 ，第一、三两项可以任意小；而由函数 $f_n(x)$ 在点 $x_0$ 连续，第二项 $|\ f_n(x) - f_n(x_0)\ |$ 也可以任意小 . ……

**系**　设在 $\mathbf{D}$ 上 $f_n(x) \to f(x)$ . 若 $f(x)$ 在 $\mathbf{D}$ 上间断 ，则函数列{ $f_n(x)$ }在 $\mathbf{D}$ 上

一致收敛和所有 $f_n(x)$ 在 $\mathbf{D}$ 上连续不能同时成立.

**注**　**Th1** 表明: 对于各项都连续且一致收敛的函数列{ $f_n(x)$ }， 有

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x) .$$

即极限次序可换 .

### 2.　　可积性:

**Th 2**　若在区间 $[\ a, b\ ]$ 上函数列{ $f_n(x)$ }一致收敛 ，且每个 $f_n(x)$ 在 $[\ a, b\ ]$ 上连续. 则有 $\displaystyle\int_a^b \left( \lim_{n \to \infty} f_n(x) \right) dx = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x) dx$ .

**证** 设在$[a,b]$上$f_n \rightrightarrows f(x)$，由 Th1，函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续,因此可积．我们要证 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx$． 注意到

$$\left|\int_a^b f_n-\int_a^b f\right|\le\int_a^b|f_n-f|，可见只要|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{b-a}在[a,b]上成立.$$

Th2 的条件可减弱为：用条件“$f_n(x)$在$[a,b]$上$(R)$可积”代替条件“$f_n(x)$在$[a,b]$上连续”．证明可参阅 江泽坚著《数学分析》上册 P350．

关于函数列逐项积分条件的减弱有一系列的工作．其中之一是：

Th 设$\{f_n(x)\}$是定义在区间$[a,b]$上的函数列．若$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上收敛且一致可积，则其极限函数$f(x)$在$[a,b]$上$(R)$可积，且有 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n=\int_a^b f$．

参阅： 马振民，（R)可积函数列逐项积分条件的减弱，西北师范大学学报（自然科学版）1988.№4.

3． **可微性：**

**Th 3** 设函数列$\{f_n(x)\}$定义在区间$[a,b]$上，在某个点$x_0\in[a,b]$收敛．对$\forall n$，$f_n(x)$在$[a,b]$上连续可导，且由导函数构成的函数列$\{f_n'(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛，则函数列$\{f_n(x)\}$在区间$[a,b]$上收敛，且有

$$\frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx}f_n(x).$$

**证** 设$f_n(x_0)\to A$，$(n\to\infty)$．$f_n'(x)\rightrightarrows g(x)$，$(n\to\infty)$．

对$\forall x\in[a,b]$，注意到函数$g(x)$连续和 $f_n(x)=f_n(x_0)+\int_{x_0}^x f_n'(t)dt$，就有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x_0)+\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^x f_n'(t)dt=\text{（对第二项交换极限与积分次序）}$$

$$=A+\int_{x_0}^x\left(\lim_{n\to\infty}f_n'(t)\right)dt=A+\int_{x_0}^x g(t)dt\overset{令}{=\!=}f(x).$$

( 估计 $\left| f_n(x_0)+\int_{x_0}^{x} f_n'(t)dt - A - \int_{x_0}^{x} g(t)dt \right| \le$

$\le \left| f_n(x_0) - A \right| + \left| \int_{x_0}^{x} \left( f_n'(t)-g(t) \right) dt \right|$，可证得 $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$． )

$$f'(x) = \left( A+\int_{x_0}^{x} g(t)dt \right)' = g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx} f_n(x) .$$

即 $\frac{d}{dx}\left( \lim_{n\to\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$．亦即求导运算与极限运算次序可换．

**例 1**　[1]P38 E1 ( 说明定理的条件是充分的，但不必要．)

**例 2**　[1]P39 E2 ( 说明定理的条件是充分的，但不必要．)

## 二.　一致收敛函数项级数和函数的解析性质:

把上述 Th1—3 表为函数项级数的语言，即得关系于和函数解析性质的相应结果．参阅[1]P38Th13.11—13.13．

**例3**　[1]P40 E3

**例4**　证明函数 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内连续．

**证**　( 先证 $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内闭一致收敛．) 对 $\forall 0<a<b<+\infty$，有

$0 \le ne^{-nx} \le ne^{-na}$，$x\in[a,b]$；又 $\sum ne^{-na} < +\infty$，$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 在 $[a,b]$ 一致收敛．

( 次证对 $\forall x_0 \in (0,+\infty)$，$f(x)$ 在点 $x_0$ 连续 ) 对 $\forall x_0 \in (0,+\infty)$，由上段讨论，$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 在区间 $[\frac{x_0}{2}, 2x_0]$ 上一致收敛；又函数 $ne^{-nx}$ 连续，$\Rightarrow$ $f(x)$ 在区间 $[\frac{x_0}{2}, 2x_0]$ 上连续，$\Rightarrow$ $f(x)$ 在点 $x_0$ 连续． 由点 $x_0$ 的任意性，$f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内连续．

**例5**　$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n\sqrt{n}}$，$x\in[-1,1]$．计算积分 $\int_0^x S(t)dt$．

作业：P41 Ex4 Ex5 Ex7

总练习：P.42 EX2