系统科学与数学 1983 3 (2): 112-119 ISSN: 1000-0577 CN: 11-2019/O1

论文

可分Banach空间上的局部Lipschitz函数的可微性(英文)

史树中

南开大学数学系

收稿日期 修回日期 网络版发布日期 接受日期

摘要 一直到最近,有不少人认为,对于可分Hilbert空间,存在处处Gteaux可微、但处处Fréchet不可微的Lipschitz函数。为此,人们还构造了好几个“反例”;但遗憾的是,这些“反例”都是错的。最近,Preiss又构造了一个新的反例;这是一个ι~2上的Lipschitz函数,处处Gteaux可微,但仅在ι~2的一个残集上不Fréchet可微。 本文将对其对偶强可分的Banach空间(从而包括所有可分Hilbert空间)提出局部Lipschitz函数的两种殆可微性之间的肯定联系。由于有了Preiss的反例,由殆Gteaux可微是得不到殆Fréchet可微的;但是我们指出,如果对Gteaux微分▽f“略加一点连续性”,仍能得到殆Fréchet可微性。 我们证明下列定理: 定理.设E为可分Banach空间。那么,下列陈述是等价的: ⅰ) E的对偶E′强可分; ⅱ) 任何E的开集Ω上的局部Lipschitz函数f,只要它满足: a) f的Gteaux可微点集G是Ω的残集; b) Gteaux微分▽f:G→E′对于E′的w~*-拓扑连续; 必定也在Ω上殆Fréchet可微. 为了证明这个定理,我们需要Asplund空间、弱Asplund空间和广义梯度的概念。 根据Preiss的反例,我们不能去掉定理中的条件b)。同时,我们也不能把条件a)代替为 a′) f在Ω的残集G上Gteaux可微;这是因为Lebourg已经证明:可分Banach空间上的局部Lipschitz函数殆Gteaux可微等价于它的广义梯度殆退化为一点.因此,由f殆Gteaux可微,我们就能得到在它的广义梯度退化为一点的集合G上,a′)和b)都成立,即a)成立\longrightarrow a′)和b)成立。这就是说,用a′)代替a)比去掉b)更弱。总之,Preiss的反例说明,这一定理本质上已不能有所改进。

关键词

分类号

DIFF RENTIABILITI D'UNE FONCTION LOCALEMENT LIPSCHITZIENNE DANS UN ESPACE DE BANACH S PARABLE

SHI SHUZHONG(SHIH SHU-CHUNG)

L' Université Nankai, Tianjin

Abstract

Key words

DOI:

通讯作者