第八章 矩阵的特征值和特征向量的计算

矩阵的特征值和特征向量

乘幂法

反幂法

矩阵特征值和特征向量计算

/ * Calculation of Eigenvalue and Eigenvector of Matrix * /

- 特征值与特征向量

$$\boxed{A\,x = \lambda\,x} \qquad (\lambda \in C,\ x \neq 0)$$

- 性质

(1) $\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$

(2) $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$

(3) 若 $B = P^{-1}AP$ 则 A 与 B 具有相同的特征值;

x 是 B 的特征向量 $\Leftrightarrow$ Px 是 A 的特征向量.

乘幂法

乘幂法：计算实矩阵按模最大的特征值

假设：(1) $|\lambda_1| > |\lambda_2| \ge \ldots \ge |\lambda_n| \ge 0$

(2) 对应的 n 个线性无关特征向量为：$x_1, x_2, \ldots, x_n$。

计算过程：任取一个非零向量 v，要求满足 $(x_1, v) \ne 0$

计算 $v_1 = Av_0,\ v_2 = Av_1,\ \ldots,\ v_{k+1} = Av_k,\ \ldots$，直到收敛。

收敛分析

$$\boldsymbol{v}_0 = \alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{x}_n \quad (\alpha_1 \ne 0)$$

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_0 = \alpha_1 \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_n \lambda_n \boldsymbol{x}_n$$

$$\cdots$$

$$\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_{k-1} = \alpha_1 \lambda_1^k \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \lambda_2^k \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_n \lambda_n^k \boldsymbol{x}_n$$

$$= \lambda_1^k \left[\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k \boldsymbol{x}_n \right] \longrightarrow \lambda_1^k \alpha_1 \boldsymbol{x}_1$$

乘幂法

当 k 充分大时，有

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{v}_k \approx \lambda_1^k \alpha_1 \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{v}_{k+1} \approx \lambda_1^{k+1} \alpha_1 \boldsymbol{x}_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{v}_{k+1} \approx \lambda_1 \boldsymbol{v}_k \Rightarrow \frac{(\boldsymbol{v}_{k+1})_j}{(\boldsymbol{v}_k)_j} \approx \lambda_1 \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

又 $\boldsymbol{v}_{k+1} = A\boldsymbol{v}_k$ $\Rightarrow$ $A\boldsymbol{v}_k \approx \lambda_1 \boldsymbol{v}_k$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{v}_k$ 为 λ_1 的近似特征向量

乘幂法的收敛速度取决于 $r = \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$ 的大小。

算法 (乘幂法)　任取非零向量 $\boldsymbol{v}_0$，计算

1. $\boldsymbol{v}_{k+1} = A\boldsymbol{v}_k$
2. 对 $\boldsymbol{v}_k$ 中所有非零分量 $(\boldsymbol{v}_k)_j$，判断 $\frac{(\boldsymbol{v}_{k+1})_j}{(\boldsymbol{v}_k)_j}$ 是否近似于某个常数，如果是，则停机；否则转第 1 步。

乘幂法

练习题

求矩阵 $A=\begin{bmatrix}12 & 6 & -6\\ 6 & 16 & 2\\ -6 & 2 & 16\end{bmatrix}$ 按模最大的特征值。

乘幂法中存在的问题：

$$\boldsymbol{v}_k \approx \lambda_1^k \alpha_1 \boldsymbol{x}_1 \longrightarrow \begin{cases}\infty, & |\lambda_1|>1\\ 0, & |\lambda_1|<1\end{cases}$$

改进：规范化

$$\begin{cases}\boldsymbol{u}_k = \dfrac{\boldsymbol{v}_k}{\max(\boldsymbol{v}_k)}\\ \boldsymbol{v}_{k+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_k\end{cases}$$

表示绝对值最大的分量

乘幂法

$$\boldsymbol{u}_k = \frac{\boldsymbol{v}_k}{\max(\boldsymbol{v}_k)}$$

$$\boldsymbol{v}_k = \lambda_1^k \left[\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k \boldsymbol{x}_n \right]$$

$$\boldsymbol{v}_{k+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_k = \frac{\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_k}{\max(\boldsymbol{v}_k)} = \lambda_1 \cdot \frac{\lambda_1^k \left[\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^{k+1} \boldsymbol{x}_i \right]}{\max\left\{ \lambda_1^k \left[\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^{k} \boldsymbol{x}_i \right] \right\}}$$

$$\Rightarrow \max(\boldsymbol{v}_{k+1}) = \lambda_1 \cdot \frac{\max\left\{ \lambda_1^k \left[\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^{k+1} \boldsymbol{x}_i \right] \right\}}{\max\left\{ \lambda_1^k \left[\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^{k} \boldsymbol{x}_i \right] \right\}} \longrightarrow \boxed{\lambda_1}$$

改进的乘幂法算法

任取非零向量 v_0

1. 求出 v_k 中按模最大的分量，设为 P_k

2. 计算 $u_k = \dfrac{v_k}{P_k}$, $v_{k+1} = Au_k$

3. 计算 P_{k+1}，若 $|P_{k+1} - P_k| < \varepsilon$，则输出 P_{k+1} 并停机;
   否则令 $k = k+1$，转第 2 步。

例：用改进的乘幂法求 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ 按模最大的特征值和相应的特征向量。

要求自己编写Matlab 程序,进行计算并给出结果.

乘幂法的加速

乘幂法的收敛速度取决于 $r=\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$ 的大小。

当 r 接近于 1 时，乘幂法收敛可能很慢！ 如何加速？

原点平移法

设 $B=A-pI$，则 B 的特征值为：$\lambda_i - p$

选择适当的 p 满足：

(1) $|\lambda_1 - p| > |\lambda_j - p|$ $(j=2, \ldots, n)$

(2) $\max\limits_{2\le j\le n}\left|\frac{\lambda_j - p}{\lambda_1 - p}\right| < \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$

用乘幂法求出矩阵 B 的按模最大的特征值：$\lambda_1 - p$

反幂法

反幂法适应范围：计算实矩阵 按模最小 的特征值

设 A 是 n 阶非奇异矩阵，其特征值为

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_{n-1}| > |\lambda_n|$$

对应的特征向量为 $x_1, x_2, \ldots, x_n$； → A 可对角化

则 A^{-1} 的特征值为：$\dfrac{1}{\lambda_1}, \dfrac{1}{\lambda_2}, \cdots, \dfrac{1}{\lambda_{n-1}}, \dfrac{1}{\lambda_n}$

对应的特征向量仍然为 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 。

计算A的按模最小特征值 $\lambda_n \Leftrightarrow$ 计算 A^{-1} 的按模最大特征值 $\dfrac{1}{\lambda_n}$

反幂法：对 A^{-1} 利用乘幂法，计算 A 的按模最小特征值 λ_n

反幂法算法

任取非零向量 v_0，令 $k = 0$

1. 求出 v_k 中按模最大的分量，设为 Q_k

2. 计算 $u_k = \dfrac{v_k}{Q_k}$, $v_{k+1} = A^{-1}u_k$

3. 计算 Q_{k+1}，若 $|Q_{k+1} - Q_k| < \varepsilon$，则输出 Q_{k+1} 并停机；
   否则令 $k = k+1$，转第 2 步。

注：(1) 可通过解方程组 $Av_{k+1} = u_k$ 来计算 $v_{k+1} = A^{-1}u_k$

(2) 比值 $\left|\dfrac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}\right|$ 越小，反幂法的收敛速度越快。

反幂法

结合原点平移的反幂法

原点平移：设 $B = A - pI$，则 B 的特征值为：$\lambda_i - p$

设 p 是 λ_i 的一个近似 ($p \approx \lambda_i$ 但 $p \neq \lambda_i$)，且满足：

$$|\lambda_i - p| \ll |\lambda_j - p| \qquad (j = 1, \dots, n,\ j \neq i)$$

则可用反幂法求出矩阵 A 的特征值 λ_i 及其特征向量。

注： 对于给定的 p，原点平移反幂法得到的是最靠近 p 的特征值及其特征向量。

例：用反幂法计算 $A = \begin{bmatrix} -12 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 7 \end{bmatrix}$ 的最靠近 $p = -13$ 的特征值和相应的特征向量。