第七章 非线性方程求解

- §1 数值求根的基本问题
- §2 二分法
- §3 不动点迭代
- §4 迭代的加速收敛方法
- §5 牛顿迭代法

§1 数值求根的基本问题

科学技术中常遇到高次代数方程或超越方程的求根问题。大于4次的代数方程无求根公式。因此需要研究函数方程求根问题的数值方法。

问题：求 $f(x)=0$ 的根或零点x^*

§1 数值求根的基本问题

求根问题包括下面三个问题:

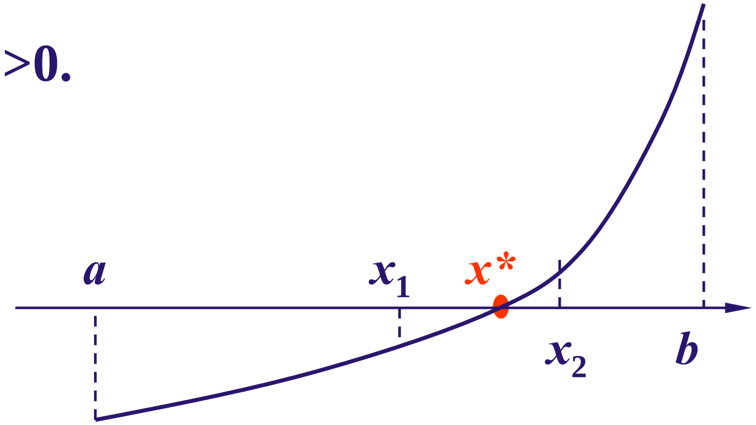
1. 根的存在性：即$f(x)=0$有没有根？若有，有几个根？

2. 哪儿有根？确定有根区间

3. 根的精确化：已知一个根的近似值后，能否将它精确到足够精度？

本章假设 $f \in C[a, b]$，且 $f(a) \cdot f(b) < 0$，则 f 在 (a, b) 上至少有一根，(a,b)即为有根区间。问题1、2得到解决。

§2 二分法



设$f(x)$的有根区间为$[a,b]=[a_0,b_0]$, $f(a)<0$, $f(b)>0$.

将区间对分，中点$x_0=((a_0+b_0)/2)$,计算$f(x_0)$,

若$f(x_0)=0$, $x^*=x_0$

<0,有根区间: $[a_1,b_1]=[x_0,b]$

>0,有根区间: $[a_1,b_1]=[a,x_0]$

对$[a_1,b_1]$对分，如此反复进行，得到一系列有根区间:

$$[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_k,b_k]\supset\cdots$$

$$b_k-a_k=\frac{b_{k-1}-a_{k-1}}{2}=\cdots=\frac{b-a}{2^k}\to 0, k\to\infty$$

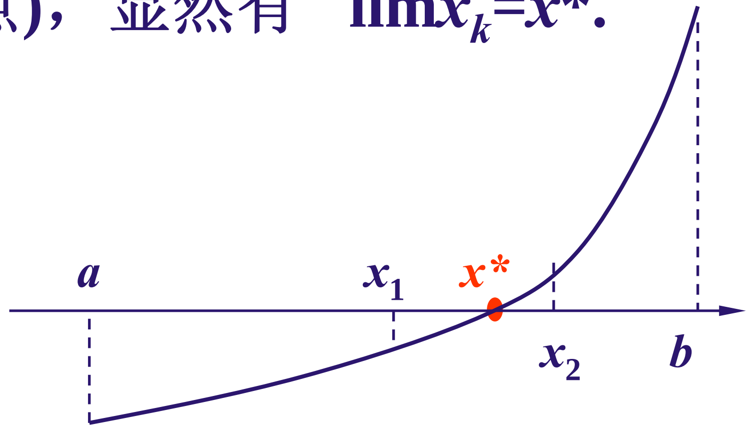
$$\{a_k\}\uparrow,\{b_k\}\downarrow, a_k<b, b_k>a,$$

$$\Rightarrow\exists x^*, s.t. \lim a_k=\lim b_k=x^*, and\ f(x^*)=0.$$

§2 二分法

取$x_k=(a_k+b_k)/2$ ($[a_k,b_k]$的中点)，显然有 $\lim x_k=x^*$.

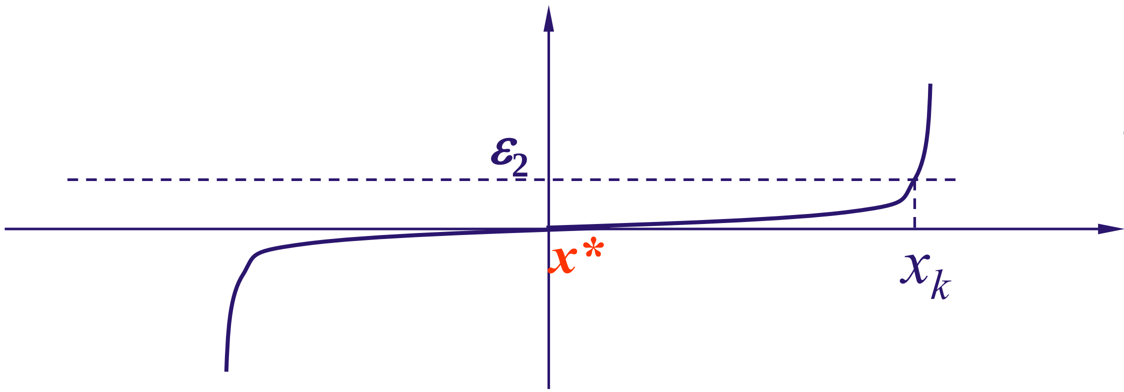
——算法和收敛性说明。



何时停止?

$$|x_{k+1}-x_k|<\varepsilon_1 \quad 或 \quad |f(x_k)|<\varepsilon_2$$

不能保证 x_k的精度



§2 二分法

误差分析

第1步产生的 $x_1 = \dfrac{a+b}{2}$ 有误差 $|x_1 - x^*| \le \dfrac{b-a}{2}$

第 k 步产生的 x_k 有误差 $|x_k - x^*| \le \dfrac{b-a}{2^k}$

对于给定的精度 ε,可估计二分法所需的步数 k:

$$\frac{b-a}{2^k} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad k > \frac{\left[\ln(b-a) - \ln \varepsilon\right]}{\ln 2}$$

优点:
① 简单，总收敛;
② 对 $f(x)$ 要求不高(只要连续即可) .

缺点:
① 无法求复根及偶重根
② 收敛慢

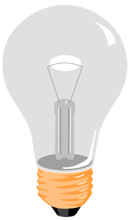
注：用二分法求根，最好先给出 $f(x)$ 草图以确定根的大概位置。或用搜索程序，将 $[a, b]$ 分为若干小区间，对每一个满足 $f(a_k)\cdot f(b_k) < 0$ 的区间调用二分法程序，可找出区间 $[a, b]$ 内的多个根，且不必要求 $f(a)\cdot f(b) < 0$ 。

§3 不动点迭代

迭代函数

$f(x)=0 \xleftrightarrow{\text{等价变换}} x=g(x)$，例 $g(x)=f(x)+x$

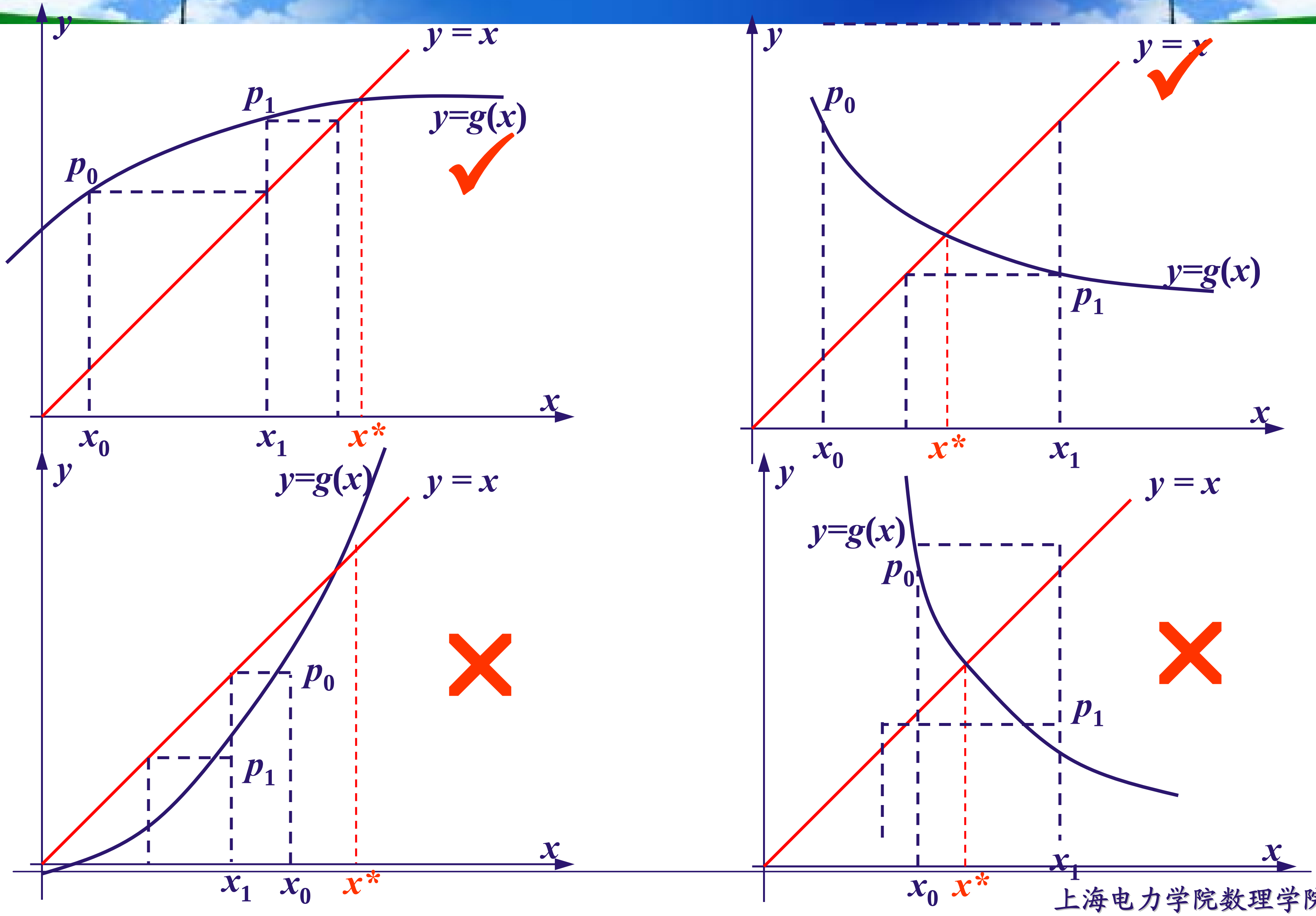
$f(x)$ 的根 $\Longleftrightarrow$ $g(x)$ 的不动点



思路

从一个初值 x_0 出发，计算 $x_1=g(x_0),\ x_2=g(x_1),\ \ldots,$ $x_{k+1}=g(x_k),\ \ldots$ 若 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛，即存在 x^* 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$，且 g 连续，则由 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} g(x_k)$ 可知 $x^*=g(x^*)$，即 x^* 是 g 的不动点，也就是 f 的根。

§3 不动点迭代



§3 不动点迭代

例：$f(x)=x^2-2x-3=0, x_1=3, x_2=-1$

$x=\sqrt{2x+3}=g(x), x_0=4, x_{n+1}=g(x_n), n=0,1,\ldots,\quad x_n\to 3$

$x=\dfrac{1}{2}(x^2-3)=g(x), x_0=4, x_1=6.5, x_2=19.625,$

$x_3=191.0\ldots, x_n$ 发散.

注：（1）迭代函数不唯一，（2）迭代点列可能收敛，也可能发散，迭代收敛与否不仅与迭代函数有关，还与初始点有关。

§3 不动点迭代

定理1 (迭代收敛条件)

考虑方程 $x = g(x)$, $g(x)\in C[a, b]$, 若

(I) $\forall\, x\in[a, b]$， $g(x)\in[a, b]$;

(II) $\exists\, 0 \le L < 1$, s.t. $\forall\, x\in[a, b]$, $|\, g'(x)\,| \le L$.

则任取初值 $x_0\in[a, b]$，由 $x_{k+1} = g(x_k)$ 得到的序列 $\{ x_k \}_{k=0}^{\infty}$ 收敛于$g(x)$ 在$[a, b]$上的唯一不动点，并且有误差估计式：

① $$|\, x^* - x_k \,| \le \frac{1}{1-L}\,|\, x_{k+1} - x_k \,|$$ 事后误差估计

② $$|\, x^* - x_k \,| \le \frac{L^k}{1-L}\,|\, x_1 - x_0 \,|$$ 事先误差估计

且存在极限 $$\lim_{k\to\infty} \frac{x^* - x_{k+1}}{x^* - x_k} = g'(x^*)$$

§3 不动点迭代

定理2

若在 x^* 的某δ领域 $B_\delta=\{x\,|\,|x-x^*|\le\delta\}$ 有 $g\in C^1[a,b]$ 且 $|g'(x^*)|<1$，则由$\forall x_0\in B_\delta$开始的迭代收敛。即调整初值可得到收敛的结果。

注：局部收敛性定理对迭代函数的要求较弱，但对初始点要求较高，即初始点必须选在精确解的附近

注： 由于事先x^*未知，所以无法检验条件$|g'(x^*)|<1$. 只能用搜索法初步确定x^*所在区间，验证该区间内任一点是否有$|g'(x^*)|<1$. 所以Th2实际上没什么应用价值，但在理论上是对$g(x)$的一个改进。

§4 迭代的加速收敛方法

有些迭代过程虽收敛，但速度很慢。为了达到所要求的精度，需要迭代的次数很多，由此必须设法加速迭代过程。

1. 基本思想

x_0 ---- x^*的预测值

$x_1 = g(x_0)$-----x_0的校正值

微分中值定理

$$x_1 - x^* = g(x_0) - g(x^*) = g'(\xi)(x_0 - x^*),$$

ξ介于x_0与x^*之间，设 $g'(x)$变化不大， $g'(x) \approx L$，则有

$$x_1 - x^* \approx L(x_0 - x^*) \Rightarrow x^* \approx \frac{1}{1-L}x_1 - \frac{1}{1-L}x_0$$

上式说明，将预测值x_0和校正值 x_1 作线性组合作为x^*的一个新近似值，可能比x_1更好。令:

§4 迭代的加速收敛方法

Linear combination　　Update　　residual

$$\hat{x}_0 = \frac{1}{1-L}x_1 - \frac{L}{1-L}x_0 = x_1 + \frac{L}{1-L}\left(\boxed{x_1 - x_0}\right)$$

一般地，有

$$x_k \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{predict}$$

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{update}$$

$$\hat{x}_k = x_{k+1} + \frac{L}{1-L}(x_{k+1} - x_k) \cdots\text{improve}$$

§4 迭代的加速收敛方法

2. Aitken 加速:

在方法1中含有L，实际应用中不便。下面设法消除L得到一种新的加速方法---Aitken（埃特金）方法。

x_0 ——prediction

$x_1=g(x_0)$ ——updating

$x_2=g(x_1)$ ——further updating

$$x_2 - x^* \approx \varphi(x_1) - \varphi(x^*) \approx L(x_1 - x^*)$$
$$x_1 - x^* \approx \varphi(x_0) - \varphi(x^*) \approx L(x_0 - x^*)$$
$$\Rightarrow \frac{x_1 - x^*}{x_2 - x^*} \approx \frac{x_0 - x^*}{x_1 - x^*}$$

$$\Rightarrow x^* \approx \frac{x_0 x_2 - x_1^2}{x_0 - 2x_1 + x_2} = x_2 - \frac{(x_2 - x_1)^2}{x_0 - 2x_1 + x_2} = x_0 - \frac{(x_0 - x_1)^2}{x_0 - 2x_1 + x_2} \triangleq \hat{x}_0$$

推广，有下面一般计算公式:

§4 迭代的加速收敛方法

推广，有下面一般计算公式：

prediction $\boldsymbol{x_k}$

updating $x_{k+1} = \varphi(x_k)$

Further updating $x_{k+2} = \varphi(x_{k+1})$

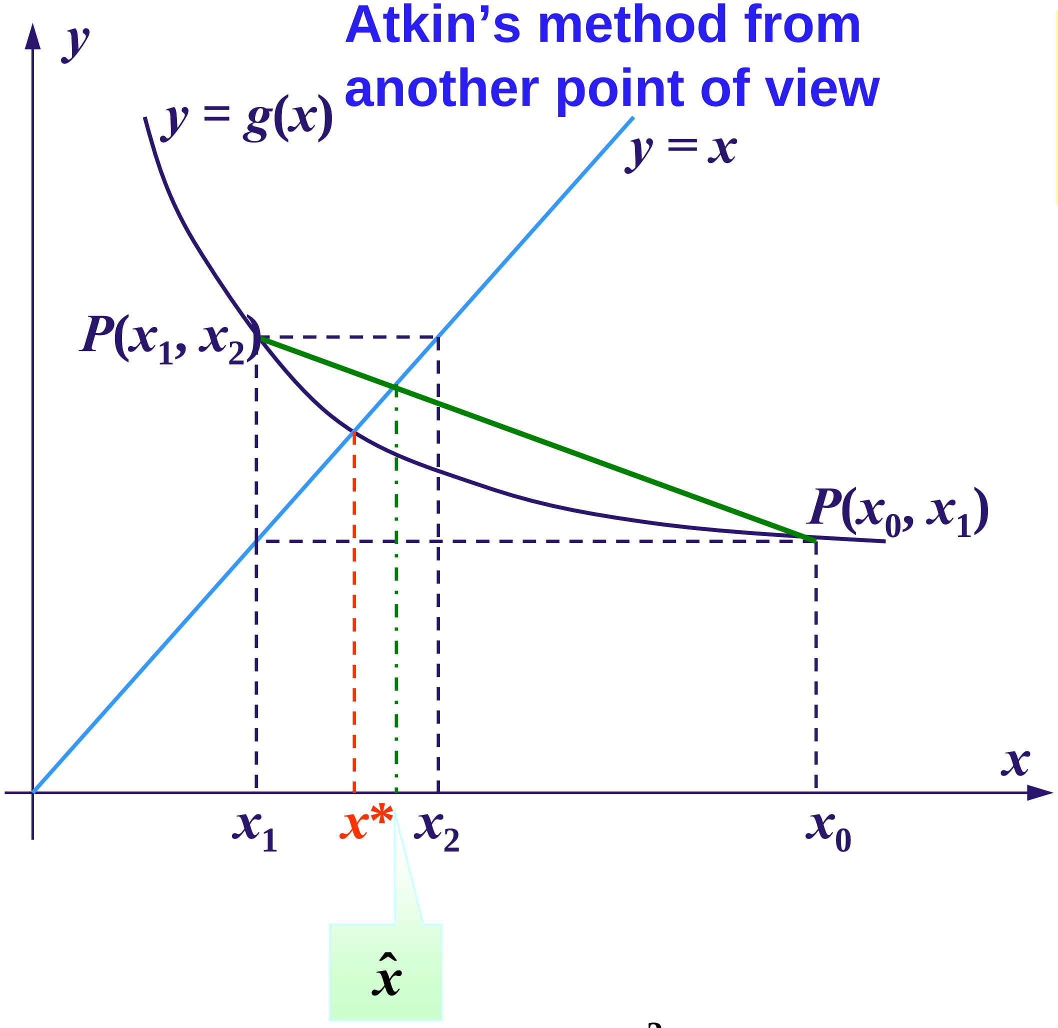
improve $$\hat{x}_k = x_{k+2} - \frac{(x_{k+2} - x_{k+1})^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k}$$

$$= x_k - \frac{(x_k - x_{k+1})^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k}$$

Aitken's acceleration

§4 迭代的加速收敛方法

Atkin's method from another point of view



$$\hat{x} = x_0 - \frac{(x_1 - x_0)^2}{x_0 - 2x_1 + x_2}$$

$$\hat{x}_k = x_k - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_k - 2x_{k+1} + x_{k+2}}$$

$x_0,\ x_1 = g(x_0),\ x_2 = g(x_1),$

$\hat{x}_0,\ x_3 = g(x_2),$

$\hat{x}_1,\ x_4 = g(x_3),$

x^* ……

$\{\hat{x}_k\}$ 比 $\{x_k\}$ 收敛得略快。

3. **Steffensen 加速**:

$x_0 \quad x_1 = g(x_0) \quad x_2 = g(x_1),$

$\hat{x}_0 \quad \bar{x}_1 = g(\hat{x}_0) \quad \bar{x}_2 = g(\bar{x}_1),$

$\hat{\hat{x}}_0$ ……

x^*

§4 迭代的加速收敛方法

4. 待定参数法:

若 $|g'(x)|\geq 1$，则将 $x=g(x)$ 等价地改造为

$$x=x-Kx+Kg(x)=(1-K)x+Kg(x)=\varphi(x)$$

求 K，使得 $|\varphi'(x)|=|1-K+Kg'(x)|<1$

例: 求 $f(x)=x^3-3x+1=0$ 在 (1, 2) 的实根。

如果用 $x=\frac{1}{3}(x^3+1)=g(x)$ 进行迭代，则在(1, 2)中有

$$|g'(x)|=|x^2|>1$$

现令 $\varphi(x)=(1-K)x+Kg(x)=(1-K)x+\frac{K}{3}(x^3+1)$

希望 $|\varphi'(x)|=|1-K+Kx^2|<1$，即 $\frac{-2}{x^2-1}<K<0$

在 (1, 2) 上可取任意 $-\frac{2}{3}<K<0$，例如 $K=-0.5$，则对应 $x=\frac{3}{2}x-\frac{1}{6}(x^3+1)$ 即产生收敛序列。

Newton's method from the point of view of acceleration

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x=g(x)=x+f(x)$$

$$\Rightarrow \bar{x}_{k+1}=x_k+f(x_k)$$

predict

update

$$x_{k+1}=\bar{x}_{k+1}+\frac{L}{1-L}(\bar{x}_{k+1}-x_k) \qquad L\approx g'(x)=1+f'(x)$$

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{L-1}=\boxed{x_k-\frac{f(x_k)}{M}}$$

$M=L-1\approx f'(x)$

简单牛顿公式

$$\boxed{x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

Newton's method

§5 牛顿迭代法

Newton's method from the point of view of linearization

牛顿法是解非线性方程（组）的一种常用迭代方法，基本思想是将非线性方程（组）转化为易于求解的线性方程（组）来求解。 ----Taylor 展开

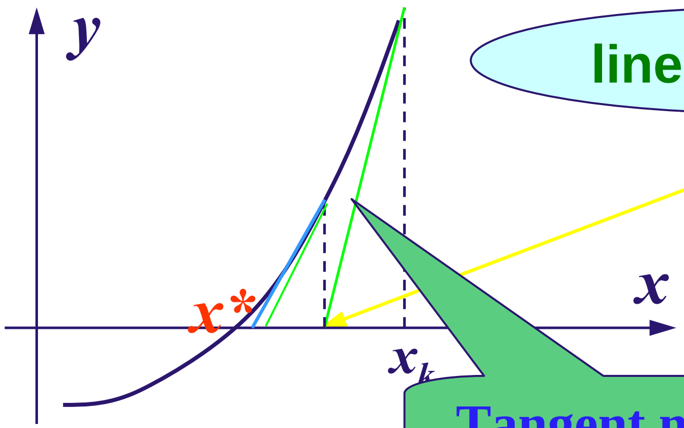
设 x^* 有近似解 $x_k \approx x^*$，将 $f(x)$ 在 x_k 做一阶Taylor展开，将 $x = x^*$ 代入，有

$$f(x^*) = f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x^* - x_k)^2，\xi \text{ 在 } x^* \text{ 和 } x_k \text{ 之间。}$$

截取线性项，得

$$0 = f(x^*) \approx f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) \Rightarrow \quad x^* \approx x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

linear equation



$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

只要 $f \in C^1$，每一步迭代都有 $f'(x_k) \neq 0$，而且 $\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$，则 x^*就是 f 的根。

§5 牛顿迭代法

定理 （牛顿法收敛的充分条件）设 $f\in C^2[a, b]$，若

(1) $f(a)f(b)<0$； (2) 在整个$[a, b]$上 f'' 不变号且 $f'(x)\neq 0$；

(3) 选取 $x_0\in[a, b]$ 使得 $f(x_0)f''(x_0)>0$；

则Newton's Method产生的序列$\{x_k\}$收敛到$f(x)$ 在 $[a, b]$ 的唯一根。

有根

只有单根，根唯一

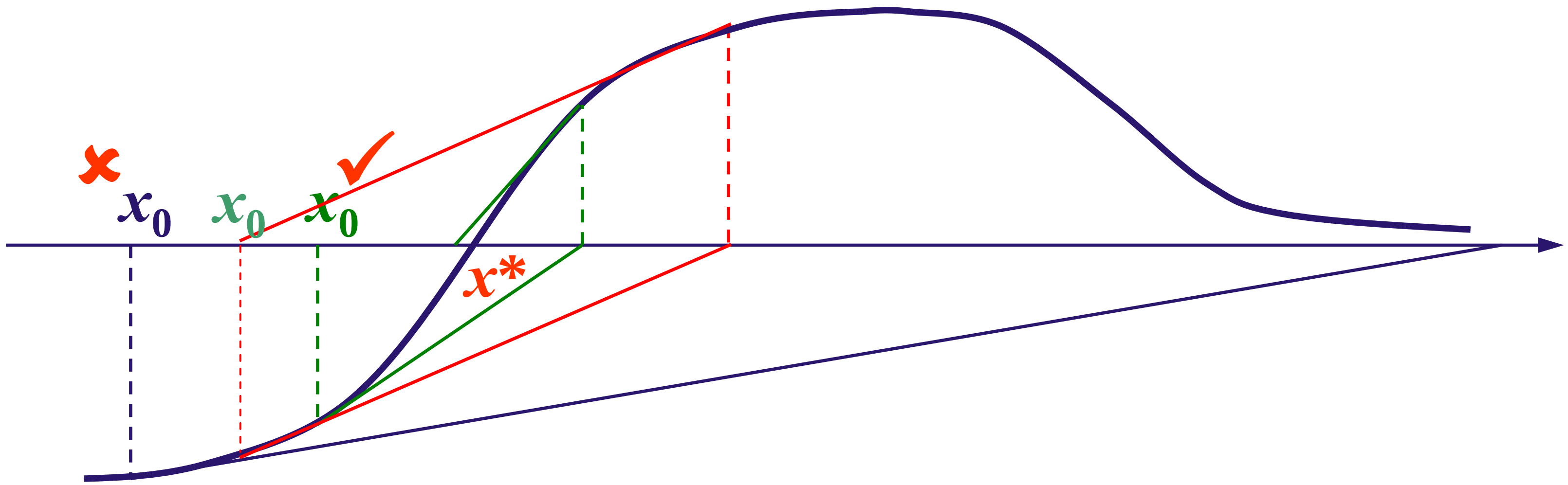
产生的序列单调有界，保证收敛。

定理 （局部收敛性）设 $f\in C^2[a, b]$，若 x^* 为 $f(x)$ 在$[a, b]$上的根，且 $f'(x^*)\neq 0$，则存在 x^* 的邻域 $B_\delta(x^*)$使得任取初值 $x_0\in B_\delta(x^*)$，Newton's Method产生的序列$\{x_k\}$收敛到 x^*，且满足

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x^*-x_{k+1}}{(x^*-x_k)^2}=-\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$$

§5 牛顿迭代法

注：**Newton's Method 收敛性依赖于x_0 的选取。**



§5 牛顿迭代法

Newton's method 举例:

例1: 用牛顿法解$x^2-c=0, c>0, const.$

解： 先导出求$\sqrt{c}$的计算公式：

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{x_k^2-c}{2x_k}=\frac{1}{2}(x_k+\frac{c}{x_k})$$

讨论收敛性： $\forall$初值$x_0>0$,

$$\begin{cases} x_{k+1}-\sqrt{c}=\dfrac{1}{2x_k}(x_k-\sqrt{c})^2 \\ x_{k+1}+\sqrt{c}=\dfrac{1}{2x_k}(x_k+\sqrt{c})^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{x_{k+1}-\sqrt{c}}{x_{k+1}+\sqrt{c}}=(\frac{x_k-\sqrt{c}}{x_k+\sqrt{c}})^2$$

§5 牛顿迭代法

$$\Rightarrow \frac{x_k - \sqrt{c}}{x_k + \sqrt{c}} = \left(\frac{x_0 - \sqrt{c}}{x_0 + \sqrt{c}}\right)^{2^k} = q_0^{2^k}, \quad q_0 = \frac{x_0 - \sqrt{c}}{x_0 + \sqrt{c}}$$

$$\Rightarrow x_k - \sqrt{c} = (x_k + \sqrt{c})q_0^{2^k} = (x_k - \sqrt{c} + 2\sqrt{c})q_0^{2^k}$$

$$= (x_k - \sqrt{c})q_0^{2^k} + 2\sqrt{c}q_0^{2^k}$$

$$\Rightarrow x_k - \sqrt{c} = \frac{2\sqrt{c}q_0^{2^k}}{1 - q_0^{2^k}}$$

$$\forall x_0 > 0, |q_0| = \left|\frac{x_0 - \sqrt{c}}{x_0 + \sqrt{c}}\right| < 1$$

$$\Rightarrow x_k - \sqrt{c} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0 \Rightarrow x_k \xrightarrow[k \to \infty]{} \sqrt{c}$$

§5 牛顿迭代法

例2: find the root of equation $\frac{1}{x}-c=0,\ c>0$, using Newton's method

$$solution: x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k(2-cx_k)$$

$$convergency:$$

$$x_k\to\frac{1}{c}\Leftrightarrow 1-cx_k \triangleq r_k\to 0, k\to\infty$$

$$r_k=1-cx_k=1-cx_{k-1}(2-cx_{k-1})=1-2cx_{k-1}+c^2x_{k-1}^2=(1-cx_{k-1})^2$$

$$=r_{k-1}^2=\cdots=r_0^{2^k}, r_0=1-cx_0$$

$$r_k\to 0\Leftrightarrow |r_0|=|1-cx_0|<1\Rightarrow 0<x_0<\frac{2}{c}$$

$$so \text{ if } 0<x_0<\frac{2}{c}, x_k\to\frac{1}{c}, k\to\infty$$