第一章　预备知识

第一节　n 维欧氏空间

1．向量空间

所谓数域 F 上的向量空间是指一个交换群 V，其元素称为向量，群的运算记为加法，并且定义了数 $\lambda \in F$ 与向量 $v \in V$ 的乘法 λv，满足以下条件：

(1) $(\lambda+\mu)v=\lambda v+\mu v$；

(2) $(\lambda\mu)v=\lambda(\mu v)$；

(3) $\lambda(v_1+v_2)=\lambda v_1+\lambda v_2$；

(4) $1v=v$，其中 $\lambda,\mu \in F$， $v,v_1,v_2 \in V$。

如果在 V 中存在 n 个元素 $\delta_1,\cdots,\delta_n$，使得 V 中任意一个元素 v 都能够表示成 $\delta_1,\cdots,\delta_n$ 的线性组合

$$v=\lambda^1\delta_1+\cdots+\lambda^n\delta_n=\sum_{i=1}^{n}\lambda^i\delta_i,\quad \lambda^i \in F,$$

并且这样的表达式是唯一的，则称 $\{\delta_i\}$ 为空间 V 的一个基底，基底 $\{\delta_i\}$ 中元素的个数 n 与基底的选择无关，称为域 F 上的向量空间 V 的维数。

注：以后讨论中 $F=\mathbb{R}$。

例子：n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$。

2．n 维欧氏向量空间

假定 V 是 n 维向量空间，若在 V 上给定一个对称的、正定的双线性函数 $<,>: V\times V \to \mathbb{R}$，即它满足下列条件：

(1) $<v_1+v_2,v>=<v_1,v>+<v_2,v>$；

(2) $<\lambda v_1,v_2>=\lambda<v_1,v_2>$；

(3) $<v_1,v_2>=<v_2,v_1>$；

(4) $<v,v>\geq 0$ 且等号只在 $v=0$ 时成立，

其中 $\lambda\in\mathbb{R}, v_1, v_2, v\in V$，则称 $(V,<,>)$ 为 n 维欧氏向量空间。满足上述条件的双线性函数 $<,>$ 称为欧氏内积，通常记成

$$v_1\cdot v_2=<v_1,v_2>$$

设 $(V,<,>)$ 为 n 维欧氏向量空间，则在 V 上能够取基底 $\{\delta_i\}$，使得

$$<\delta_i,\delta_j>=\delta_{ij}=\begin{cases}1, i=j,\\ 0, i\neq j.\end{cases}$$

这样的基底称为 V 中的单位正交基底。若在 V 中取定一个单位正交基底 $\{\delta_i\}$，则向量 v 和 w 的内积成为

$$<v,w>=\sum_{i=1}^{n}\lambda^i\mu^i,$$

其中

$$v=\sum_{i=1}^{n}\lambda^i\delta_i, w=\sum_{i=1}^{n}\mu^i\delta_i。$$

若在 V 中有另一单位正交基底 $\{e_i\}$，且设

$$e_j=\sum_{i=1}^{n}a_j^i\delta_i,$$

则基底变换的矩阵 (a_j^i) 是正交矩阵。

注： Einstein 和式约定：$v=\lambda^i\delta_i$， $w=\mu^i\delta_i$。

3．仿射空间

定义 1 设 V 是 n 维向量空间， A 是一个非空集合， A 中的元素称为点。如果存在一个映射 $\rightarrow: A\times A\rightarrow V$，它把 A 中任意一对有序的点 P,Q 映为 V 中的一个向量 $\overrightarrow{PQ}\in V$，且满足以下条件：

(1) $\overrightarrow{PP}=0, \forall P\in A$；

(2) $\forall P\in A, \forall v\in V$，存在唯一的一点$Q\in A$，使得$\overrightarrow{PQ}=v$；

(3) $\forall P,Q,S\in A$，成立等式$\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QS}=\overrightarrow{PS}$，

则称A是n维仿射空间，且称V是与仿射空间A伴随的向量空间。

定义 2 设A是n维仿射空间，V是伴随的向量空间。任取A中一点P及V中一个基底$\{v_i\}$，则称图形$\{P;v_i\}$为仿射空间A中的一个标架。

4．n维欧氏空间

设$(V,<,>)$为n维欧氏向量空间，则以V为伴随向量空间的仿射空间称为n维欧氏空间，记为E^n。

$$d(P,Q)=\sqrt{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PQ}}\text{。}$$

设$\{O;\delta_i\}$为E^n中的单位正交标架。$P=(\lambda^1,\cdots,\lambda^n)$，$Q=(\mu^1,\cdots,\mu^n)$，则

$$d(P,Q)=\sqrt{\sum_{i=1}^n(\mu^i-\lambda^i)^2}\text{。}$$

例 1 n维向量空间V可以看作一个n维仿射空间A。

注：引进仿射空间的目的是为了使代数结构几何化；欧氏空间是欧氏向量空间的几何化。

5．等距变换

$$\sigma: E^n\to E^n,\quad d(\sigma(P),\sigma(Q))=d(P,Q)$$

设$\{O;\delta_i\}$和$\{P;e_i\}$为E^n中的单位正交标架，假定

$$\begin{cases}\overrightarrow{OP}=\sum_{i=1}^n a^i\delta_i,\\ e_i=\sum_{j=1}^n a_i^j\delta_j,\end{cases}$$

其中(a_i^j)是正交矩阵。设Q是E^n中任意一点，它关于于标架$\{O;\delta_i\}$的坐标设为$\lambda^i,1\le i\le n$。令$Q'=\sigma(Q)$是点Q在等距变换σ下的象点。那么Q'点关于标架$\{P;e_i\}$的坐标与点Q关于$\{O;\delta_i\}$的坐标是相同的。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ'} &= \overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ'}\\ &=\sum_{i=1}^n a^i\delta_i+\sum_{i=1}^n\lambda^i e_i\\ &=\sum_{i=1}^n\left(a^i+\sum_{j=1}^n\lambda^j a_j^i\right)\delta_i\end{aligned}$$

所以象点Q'关于标架$\{O;\delta_i\}$的坐标是

$$\mu^i=a^i+\sum_{j=1}^n\lambda^j a_j^i$$

作业：P47 Ex2、Ex4