沈阳农业大学 2013 年硕士研究生入学初试试题

考试科目：827 数学分析　共 3 页

分　　值：150 分

适用专业：生物数学

注意：答案必须写在答题纸上，写在题签上无效。

一、填空题（本题共 7 小题，每小题 5 分，满分 35 分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)=$ ________.

2. 已知 $y=(\tan x)^{\sin x}$，则 $dy=$ ________.

3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 4}}\dfrac{\sin xy}{x}=$ ________.

4. 设 $f'(\sin^2 x)=\cos 2x+\tan^2 x\,(0<x<1)$，则 $f(x)=$ ________.

5. 求曲线 $y=\int_0^x\sqrt{\sin t}\,dt\,(0\le x\le\pi)$ 的弧长 ________.

6. 将 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x-2}$ 展成 $(x-1)$ 的幂级数为 ________.

7. 设 Σ 是立体 $0\le x\le 1, 0\le y\le 1, 0\le z\le 1$ 的表面外侧，则 $\oiint\limits_{\Sigma} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=$ ________.

二、单项选择题（本题共 7 小题，每小题 5 分，满分 35 分）

1. 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处[　].

(A) 偏导数存在且连续；　(B) 可微；

(C) 偏导数不存在且不可微；　(D) 偏导数存在但不连续.

2. 曲线 $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$ 有[　]条渐近线

(A) 0；　(B) 1；　(C) 2；　(D) 3.

3. 由旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 和平面 $z=a^2$ 围成的立体体积为[　].

(A) $\dfrac{1}{4}\pi a^4$；　(B) πa^4；　(C) $\dfrac{1}{3}\pi a^4$；　(D) $\dfrac{1}{2}\pi a^4$.

4. 设$f\left(x\right)$为不恒等于零的奇函数，且$f'\left(0\right)$存在，则函数$g\left(x\right)=\dfrac{f\left(x\right)}{x}$[ ].

(A)在$x=0$处左极限不存在； (B)有跳跃间断点$x=0$；

(C)在$x=0$处右极限不存在； (D)有可去间断点$x=0$.

5. 方程$x^2=x\sin x+\cos x$实根的个数为[ ].

(A) 0； (B) 1； (C) 2； (D) 3.

6. 反常积分$\int_a^b \dfrac{dx}{\left(x-a\right)^p}$当[ ]时收敛.

(A) $p<1$； (B) $P\le 1$； (C) $P>1$； (D) $P\ge 1$.

7. 设$p_n=\dfrac{a_n+\left|a_n\right|}{2},q_n=\dfrac{a_n-\left|a_n\right|}{2},n=1,2,\cdots$, 则下列命题正确的是[ ].

(A)若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$条件收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$都收敛；

(B) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$都收敛；

(C) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$条件收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$敛散性都不定；

(D) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$敛散性都不定.

三、（本题满分 10 分）设$\varphi\left(u,v\right)$具有连续偏导数，证明由方程$\varphi\left(cx-az,cy-bz\right)=0$所确定的函数$z=f\left(x,y\right)$满足$a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}=c$。

四、（本题满分 10 分）证明：若函数$f(x)$在区间$\left[a,+\infty\right)$连续，且$\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=b$，则函数$f(x)$在区间$\left[a,+\infty\right)$一致连续。

五、（本题满分 10 分）设函数$f\left(x\right)$在$\left[0,1\right]$上可导，且有$3\int_{\frac{2}{3}}^{1}f\left(x\right)dx=f\left(0\right)$，证明至少存在一个$\xi\in\left(0,1\right)$，使$f'\left(\xi\right)=0$。

六、（本题满分 10 分）证明：若函数$f\left(x\right)$在$\left[a,b\right]$可积，则函数$\left[f\left(x\right)\right]^2$在$\left[a,b\right]$也可积。

七、（本题满分 10 分）将函数$f\left(x\right)=\dfrac{\pi-x}{2}\left(0\le x\le\pi\right)$展开成正弦级数，并求

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n+1}$的和。

八、(本题满分 10 分)在平面$x+y+z=1$求一点，使它与两个定点$P(1,0,1)$、$Q(2,0,1)$的距离平方和为最小。

九、(本题满分 10 分) 证明：$\int_0^x dv\int_0^v du\int_0^u f(t)dt=\frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 f(t)dt$。

十、(本题满分 10 分) 计算$\oint_L\frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$，其中$L$包含原点的任意闭曲线，$L$的方向为逆时针。