

中山大学

二〇一四年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码: 668

科目名称: 数学分析

考试时间: 1月5日上午

考生须知

全部答案一律写在答题纸上, 答在试题纸上的不计分! 答题要写清题号, 不必抄题。

(一) (30分) 计算 (1) $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+2}{x-2}} dx$

(2) $\int_{\Gamma} xy ds$, 其中 Γ 为 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 与 $x + y + z = 0$ 的交线.

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^{\pi} x^{2013} \sin^n x dx \right)^{\frac{1}{n}}$

(二) (10分) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 并且 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 对任意 $a, b, c \in \mathbb{R}$ 都有 $\int_a^{a+c} f(x) dx = \int_b^{b+c} f(x) dx$ 证明: $f(x) \equiv 0$.

(三) (15分) 表格填空:

$\sum_{n=3}^{\infty} a^n n^b (\ln n)^c$	绝对收敛	条件收敛	发散
参数 a, b, c 的取值范围			

(四) (10分) 求方程组 $\begin{cases} u+v=x+y \\ \frac{\sin u}{\sin v} = \frac{x}{y} \end{cases}$ 所确定的隐函数 $\begin{cases} u=u(x, y) \\ v=v(x, y) \end{cases}$ 的微分 du, dv .

(五) (10分) 讨论广义积分 $\int_0^{\infty} \sin x^2 dx$ 和 $\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \sin(x^2 + y^2) dx dy$ 的敛散性. 其中

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \sin(x^2 + y^2) dx dy = \lim_{r \rightarrow \infty} \iint_{\substack{x^2+y^2 \leq r^2 \\ x, y \geq 0}} \sin(x^2 + y^2) dx dy.$$

(六) (15分) 讨论函数 $f(x, y) = \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} \sin \frac{y}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 的可微性.

(七) (15分) 讨论积分 $f(x) = \int_0^{\infty} e^{-x(t+\frac{1}{t})} dt$ 的收敛域及 $f(x)$ 的连续性.

(八) (10分) 半径为 r 的球的中心在单位球 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的表面上, 问 r 取何值时该球位于单位球内部分的表面积最大?

(九) (15分) 设 $a > 0$, 求 $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ 与 $x = 2a$ 所围成的面积.

(十) (10分) 讨论 $f(x) = x \sin x$ 在 $[1, \infty)$ 上是否一致连续, 并说明理由.

(十一) (10分) 设 $f(x) = \int_x^{x^2} (1 + \frac{1}{2t})^t [e^{\frac{1}{\sqrt{t}}} - 1] dt, (x > 0)$. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) \sin \frac{1}{n}$.