中国科学院研究生院

2007年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题

科目名称：数学分析

考生须知：

1．本试卷满分为150分，全部考试时间总计180分钟。
2．所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

---

1. （15分）求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n n!}x^n$ 的收敛域，并求其和。

2. （15分）讨论积分 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx$ 的绝对收敛和条件收敛。

3. （15分）计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} yzdydz+(x^2+z^2)ydzdx+xydxdy$，其中 Σ 为曲面 $4-y=x^2+z^2$ 在 xoz 平面的右侧部分的外侧。

4. (20分，每小题10分）证明下列不等式：

   （1） $x^n(1-x)<\frac{1}{ne}\quad(0<x<1,\ n$ 为正整数)；

   （2） $x^y+y^x>1\quad(x,y>0)$。

5. （15分）设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，且 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ 绝对收敛。证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛。

6. （15分）假设 $f(x)$ 为二次连续可微实值函数，对于所有的实数 x，满足 $|f(x)|\le 1$ 且满足 $(f(0))^2+(f'(0))^2=4$。证明存在实数 x_0，满足 $f(x_0)+f''(x_0)=0$。

7. （15 分）假设 $|f(x)|\le 1$ 和 $|f''(x)|\le 1$ 对一切 $x\in[0,2]$ 成立，证明：在 $[0,2]$ 上有 $|f'(x)|\le 2$。

8. （15 分）设 $D=[0,1]\times[0,1]$, $f(x,y)$ 是定义在 D 上的二元函数，$f(0,0)=0$，且 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微。求极限：

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\int_0^{x^2}dt\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)du}{1-e^{-\frac{x^4}{4}}}$$

9. （15 分）设 $-\infty<x_0<+\infty$，$\varphi(x)$ 和 $f(x)$ 在 $[x_0,x_0+h]$ 上连续，且存在 $M>0, K>0$，使得

$$|\varphi(x)|\le M\left(1+K\int_{x_0}^{x}|\varphi(t)f(t)|\,dt\right), x\in(x_0,x_0+h)。$$

证明：$\varphi(x)$ 必满足

$$|\varphi(x)|\le M\exp\left\{KM\int_{x_0}^{x}|f(t)|\,dt\right\}, x\in(x_0,x_0+h)。$$

10.（10 分）设 $\alpha\in(0,1)$，记 $e=(1,1,\cdots,1)^T\in R^n$，$S\left(\frac{e}{n},\frac{\alpha}{n}\right)=\left\{x\in R^n:\left\|x-\frac{e}{n}\right\|\le\frac{\alpha}{n}\right\}$，对于 $x\in S\left(\frac{e}{n},\frac{\alpha}{n}\right)$ 且 $e^Tx=1$，证明：

$$-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\le n\ln n+\frac{\alpha^2}{2(1-\alpha)^2}。$$