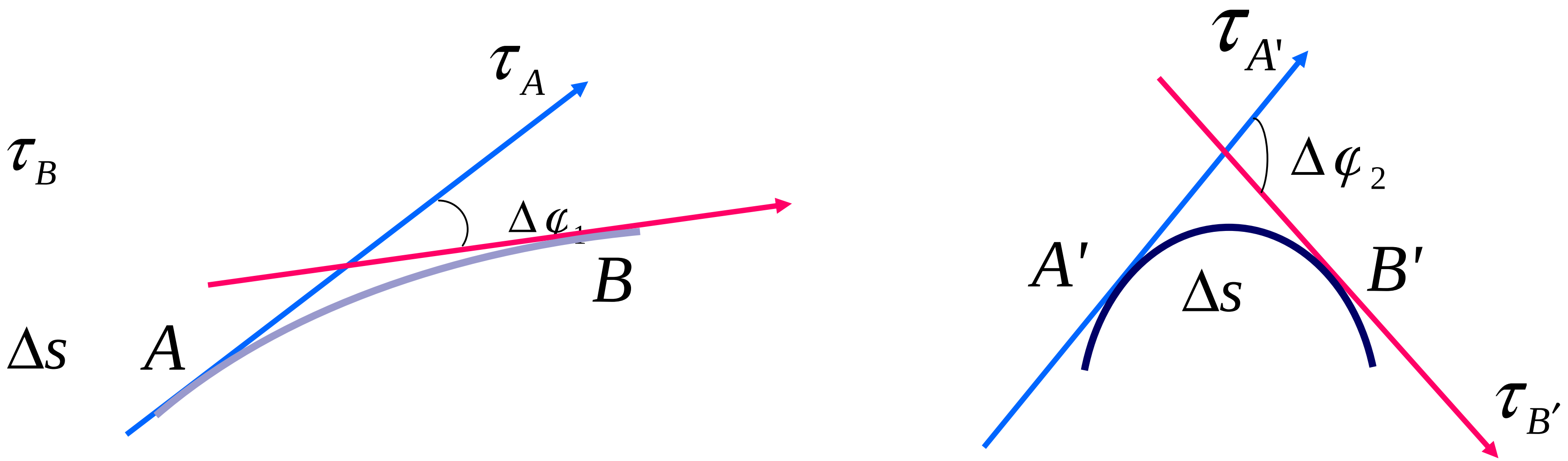
§4. 平面曲线的曲率

一、曲率的定义

对于不同的曲线，其弯曲程度一般不同. 例如：

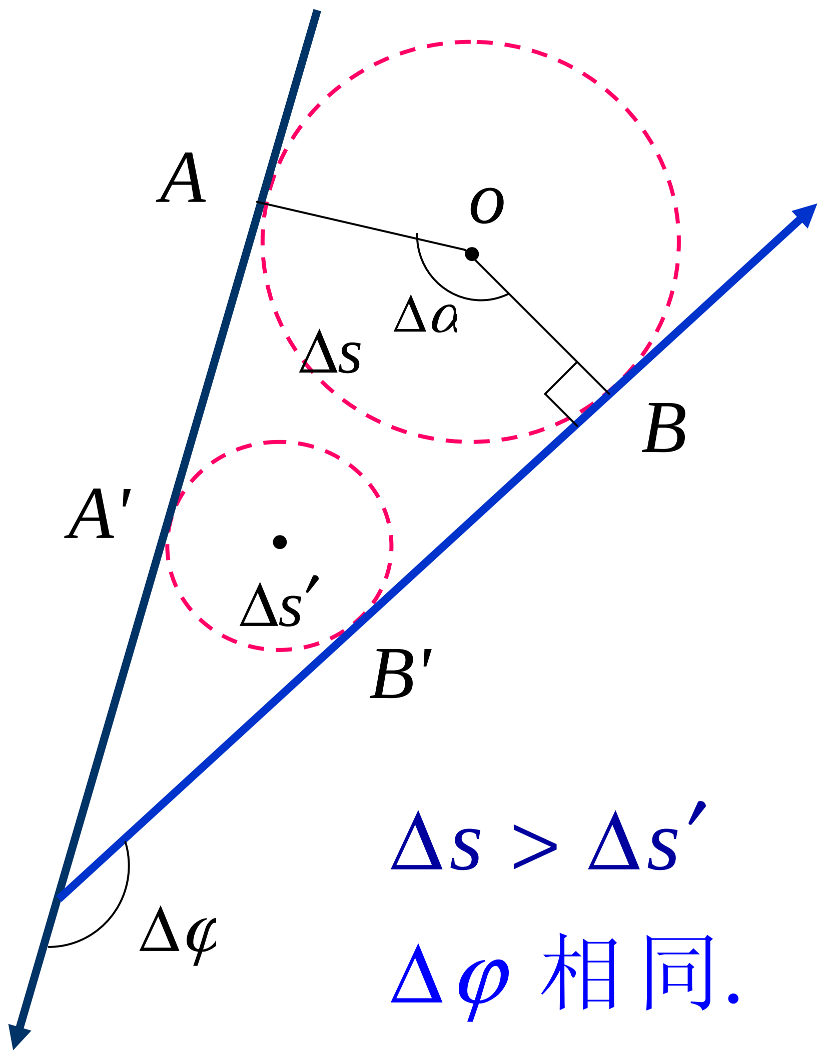


$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'} = \Delta s.$$

$$\Delta\varphi_1 < \Delta\varphi_2.$$

结论:

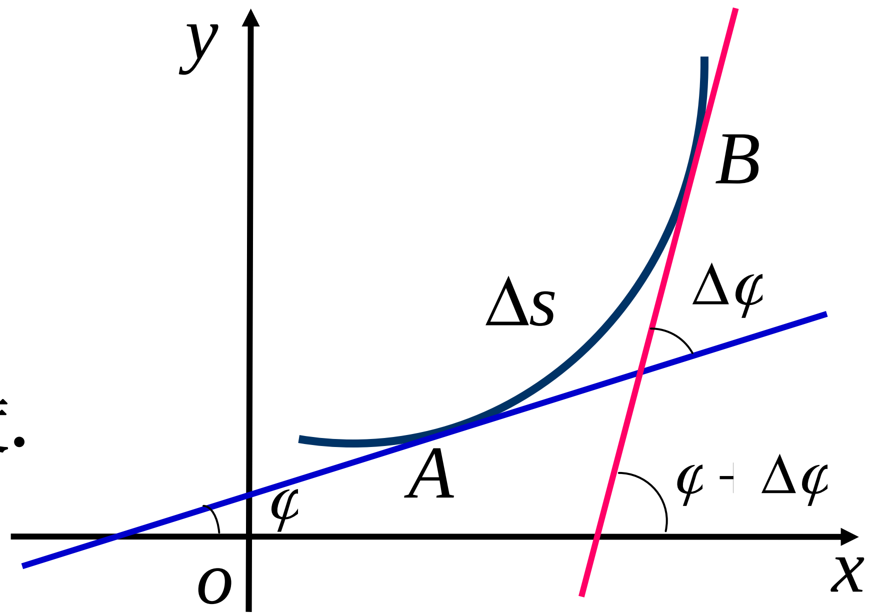
曲线的弯曲程度与其切线方向变化的夹角 $\Delta\varphi$ 的大小及其弧长 Δs 有关.



$\Delta s > \Delta s'$

$\Delta\varphi$ 相同.

将
$$\overline{K} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$$



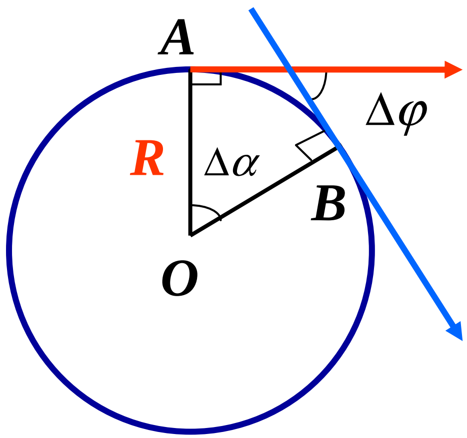
称为曲线段 ***AB*** 的平均曲率，它刻画了一段曲线的平均弯曲程度.

对于半径为***R***的圆，

任意弧段 $\overset{\frown}{AB} = \Delta s = R\,\Delta\alpha$，

$\Delta\varphi = \Delta\alpha$ 有

$$\overline{K} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{\Delta\alpha}{R\Delta\alpha} = \frac{1}{R}.$$



对于直线，其切线方向不变，即 $\Delta\varphi=0$，有

$$\overline{K}=\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}=0,$$ 故"直线不曲".

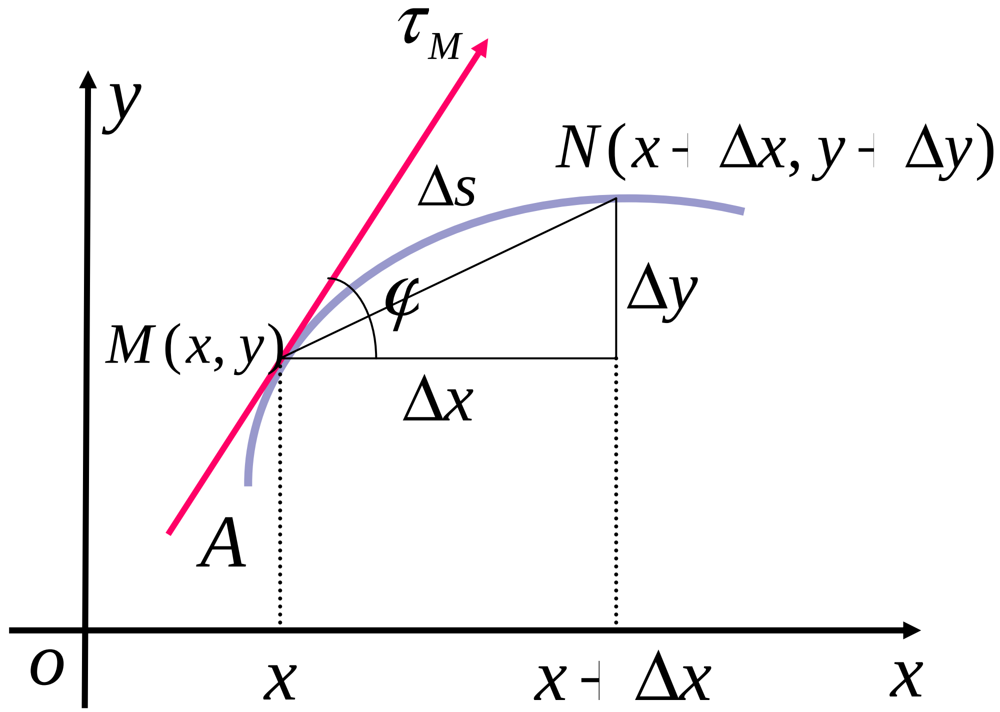
同一条曲线的不同点处，曲线弯曲的程度可能不同.

Def： 曲线在 A 点的曲率为

$$K=\left|\frac{d\varphi}{ds}\right|=\left|\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|.$$

其中 Δs 为点A及其邻点B之间弧长，$\Delta\varphi$ 为$\overset{\frown}{AB}$上切线方向变化的角度. 曲率刻画了曲线在一点的弯曲程度.

二、弧长的微分



如图，设曲线的弧长 s 由点 A 起算. 任取 $\overset{\frown}{MN} = \Delta s$，有

$$\overline{MN}^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2,$$

由此

$$\left(\frac{\overline{MN}}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2.$$

当 Δx 充分小时，在一些假定之下(如曲线有连续导数),

$\overline{MN} \approx \widehat{MN}$，用 $\widehat{MN}$ 代替 $\overline{MN}$，再令 $\Delta x \to 0$，得

$$(\frac{ds}{dx})^2 = 1 + (\frac{dy}{dx})^2,$$

从而即得 弧长微分的公式

$$ds = \pm\sqrt{1 + y'^2}\,dx,$$

或

$$ds = \pm\sqrt{dx^2 + dy^2}, \quad ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

关于 ds 的具体表示式：

(1) 弧的方程为 $y = f(x)(a \le x \le b)$，$f'(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，则

$$ds = \pm\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

(2) 弧的方程为 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$，$\alpha \le t \le \beta$，$\varphi'(t)$ 与 $\psi'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 连续，且不全为 0，则

$$ds = \pm\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt.$$

(3) 弧的方程为 $\rho=\rho(\theta)$(极坐标方程)$(\alpha \le \theta \le \beta)$，$\rho'(\theta)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 连续，则

$$ds = \pm\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\,d\theta.$$

三、曲率的计算

先计算$d\varphi$，考虑曲线 $y = f(x)$在M点的切线，有

$$\tan\varphi = y', \quad i.e.\ \ \varphi = \arctan y'.$$

两边求微分，得 $$d\varphi = \frac{dy'}{1+y'^2} = \frac{y''}{1+y'^2}dx.$$

把ds和$d\varphi$代入 $K = \left|\frac{d\varphi}{ds}\right|$ 中得曲率的计算公式：

$$K = \left|\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|.$$

参数方程 $x=\varphi(t),\ \ y=\psi(t),$

$$K=\left|\frac{\varphi'\psi''-\varphi''\psi'}{(\varphi'^2+\psi'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|,\quad \begin{pmatrix}\varphi'=\varphi'(t)\\ \psi'=\psi'(t)\end{pmatrix},$$

极坐标方程 $\rho=\rho(\theta),$

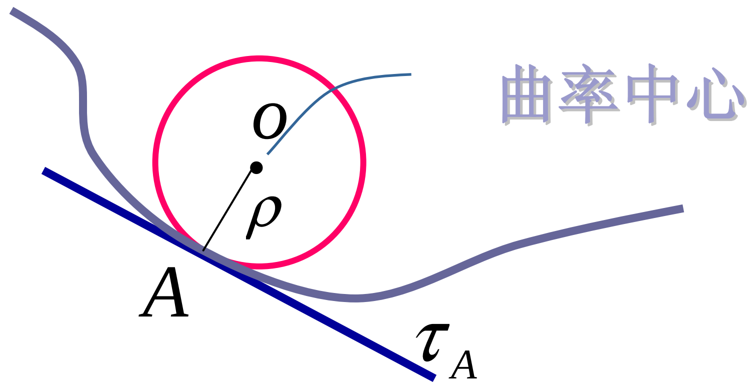
$$K=\left|\frac{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}{(\rho^2+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|,\quad (\rho'=\rho'(\theta)).$$

四、曲率半径与曲率圆

对半径为 **R** 的圆，$K = \dfrac{1}{R}$，$R = \dfrac{1}{K}$.

Def：曲线上一点的曲率的倒数称为曲线在该点的曲率半径，记作

$$\rho = \frac{1}{K}.$$



几何意义：

如图，在**A**点作曲线的法线，并在曲线凹的一侧的法线上取一点**O**，使得 **OA**= ρ (曲线在**A**点的曲率半径). 以**O**为圆心，ρ 为半径作一个圆，称之为曲线在**A**点的曲率圆.

曲率圆与曲线在A点具有以下关系：

(1) 有共同的切线，即圆与曲线在点 A 相切；

(2) 有相同的曲率；

(3) 圆和曲线在点 A 具有相同的一阶和二阶导数.

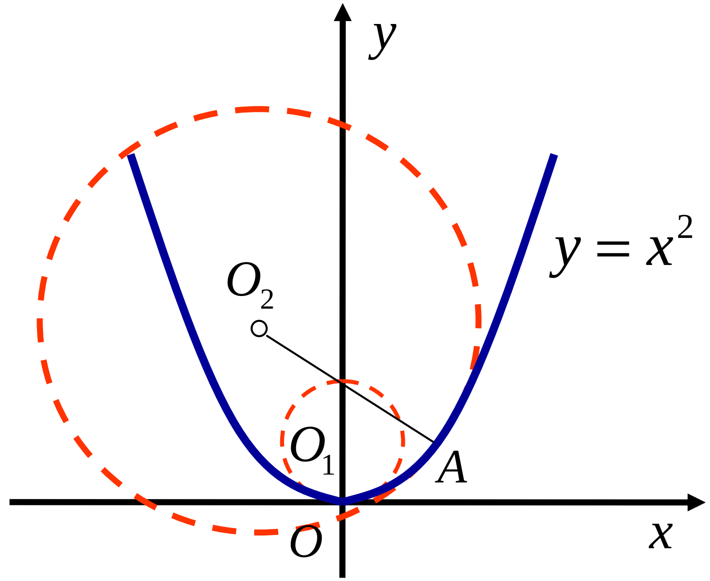
表明： 讨论 $y = f(x)$ 在某点 x 的性质时，若此性质仅与 x, y, y', y'' 有关，则只要讨论曲线在 x 点的曲率圆的性质，即可知这曲线在 x 点附近的性质.

例1. 求抛物线 $y=x^2$ 上任一点处的曲率和曲率半径.

解: $y'=2x,\ \ y''=2.$

$$K=\frac{2}{\left|(1+4x^2)^{3/2}\right|},\quad \rho=\frac{1}{K}=\frac{\left|(1+4x^2)^{3/2}\right|}{2}.$$

在点$(0,0)$, $K_{\max}=2,\ \rho_{\min}=\dfrac{1}{2}.$



随着曲线 $y=x^2$

自原点逐渐上升 $(|x|$增大),

K 逐渐减小, ρ 逐渐增大.

求 $y=x^2$ 的最小曲率半径时的曲率圆的方程.

设曲率圆圆心 (x_0,y_0)，则

$$(x_0-0)^2+(y_0-0)^2=\frac{1}{4}=\rho_{\min}^2,$$

又在 $(0,0)$ 处，$y'=0$，$y''=2$，故

切线：$y=0$ ，　　法线：$x=0$.

而圆心 (x_0,y_0) 在法线上，故 $x_0=0$，$y_0=\frac{1}{2}$（舍 $y_0=-\frac{1}{2}$）.

于是，$y=x^2$ 在 $(0,0)$ 点处的曲率圆方程：

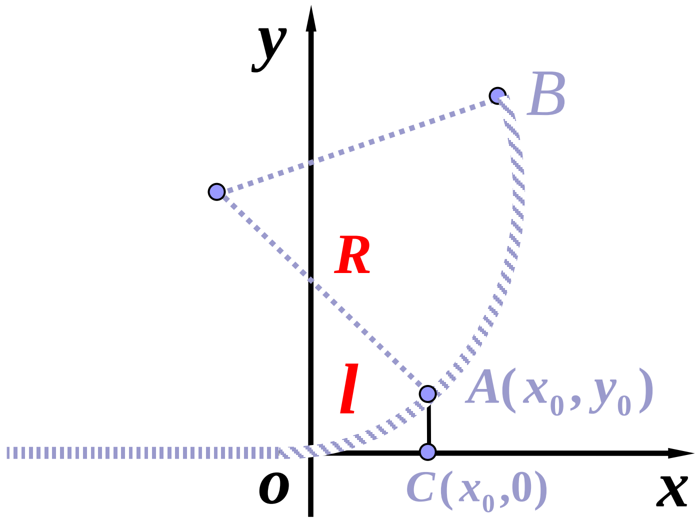
$$x^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}.$$

例2. 铁道的弯道分析

火车转弯时, 为使火车能平稳地转过弯去, 必须将外轨垫高. 铁轨由直道转入圆弧弯道时 (设半径为R), 外轨的弯曲有一个跳跃, 会导致接头处的曲率突然改变, 容易发生事故.

为了行驶平稳, 往往在直道和弯道之间接入一段缓冲段, 使曲率连续地由零过渡到 $\frac{1}{R}$.

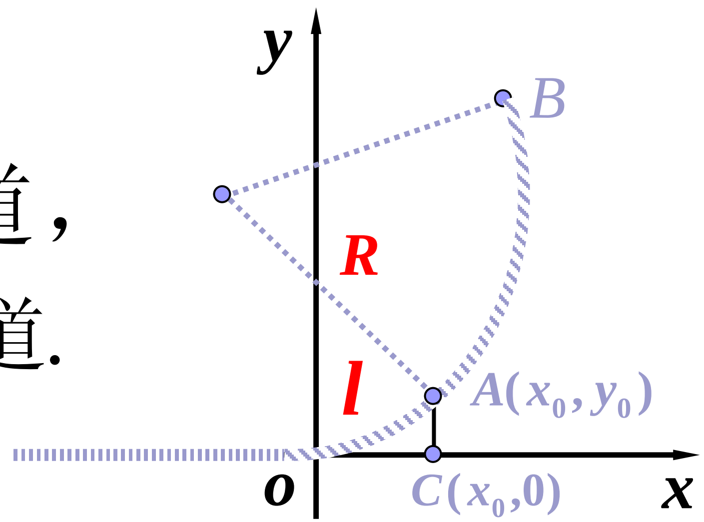
通常用三次抛物线 $y=\dfrac{1}{6Rl}x^3$，$x\in[0,x_0]$. 作为缓冲段 OA，其中 l 为 OA 的长度，验证缓冲段 OA 在始端 O 的曲率为零,并且当 $\dfrac{l}{R}$ 很小 $(\dfrac{l}{R}<<1)$ 时，在终端 A 的曲率近似为 $\dfrac{1}{R}$.



证明：如图

$x < 0$ 表示直线轨道，

OA是缓冲段，AB是圆弧轨道.



在缓冲段上，

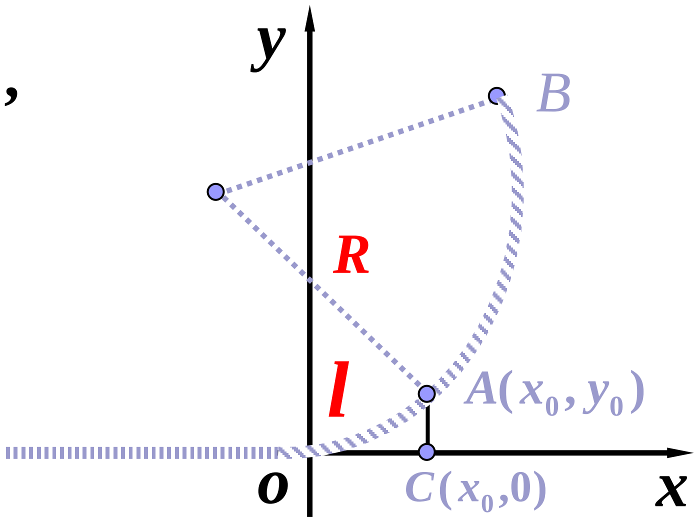
$$y' = \frac{1}{2Rl}x^2, \quad y'' = \frac{1}{Rl}x.$$

在$x = 0$处, $y' = 0$, $y'' = 0$, 故缓冲始点的曲率 $k_0 = 0$.

根据实际要求 $l \approx x_0$,

有 $\quad y'\big|_{x=x_0} = \dfrac{1}{2Rl}x_0^2 \approx \dfrac{1}{2Rl}l^2 = \dfrac{l}{2R},$

$$y''\big|_{x=x_0} = \frac{1}{Rl}x_0 \approx \frac{1}{Rl}l = \frac{1}{R},$$

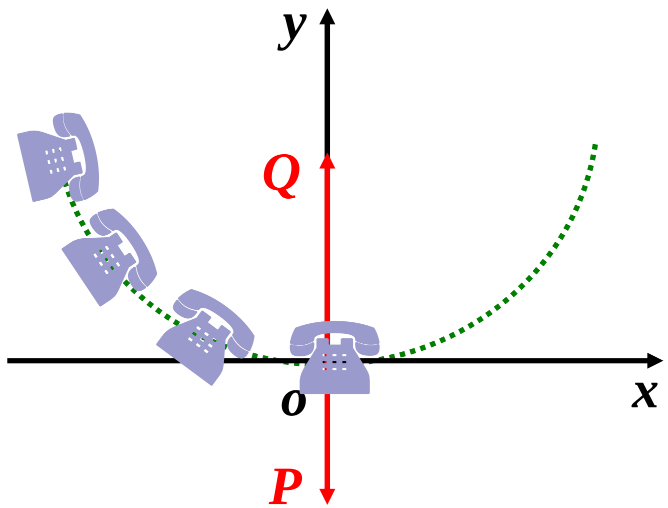


故在终端 A 的曲率为

$$k_A = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\Bigg|_{x=x_0} \approx \frac{\frac{1}{R}}{\left(1+\frac{l^2}{4R^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

☒ $\dfrac{l}{R} << 1,$ 略去二次项 $\dfrac{l^2}{4R^2},$ 得 $k_A \approx \dfrac{1}{R}.$

例3 飞机沿抛物线 $y=\dfrac{x^2}{4000}$ (单位为米)俯冲飞行,在原点O处速度为$v=400$米/秒,飞行员体重70千克.求俯冲到原点时,飞行员对座椅的压力.



解 如图,受力分析 $F=Q-P$,

视飞行员在点o作匀速圆周运动,. $F=\dfrac{mv^2}{\rho}$.

O点处抛物线轨道的曲率半径

$$y'\big|_{x=0} = \frac{x}{2000}\bigg|_{x=0} = 0, \quad y''\big|_{x=0} = \frac{1}{2000}.$$

得曲率为 $k\big|_{x=x_0} = \dfrac{1}{2000}$. 曲率半径为 $\rho = 2000$ 米.

$$.\quad F = \frac{70\times 400^2}{2000} = 5600(\text{牛}) \approx 571.4(\text{千克}),$$

$$.\quad Q \approx 70(\text{千克力}) + 571.4(\text{千克力}),$$

$$= 641.5(\text{千克力}).$$

即:飞行员对座椅的压力为641.5千克力.

四、小结

运用微分学的理论,研究曲线和曲面的性质的数学分支——微分几何学.

基本概念：弧微分,曲率,曲率圆.

曲线弯曲程度的描述——曲率;

曲线弧的近似代替曲率圆(弧).