粘合空间

一、 几个常见曲面

拓扑学（代数拓扑、低维流形）的研究对象：$\mathbb{R}^n$、S^n、T^n、$Möbius$带、平环、$Klein$瓶和射影平面等。

1． 平环

将矩形面块弯曲并将两侧边粘接，得到一截圆柱面。

等价关系：$(0,t)\sim(1,t)$，$\forall t\in[0,1]$。

2． $Möbius$带

先将矩形拧转 180 度，再将两侧边粘接。

等价关系：$(0,t)\sim(1,1-t)$，$\forall t\in[0,1]$。

3． 环面

将圆柱面每一直母线段两端粘合,两个截口以相同的方向粘接，得到环面。

等价关系：$(0,t)\sim(1,t)$，$(t,0)\sim(t,1)$，$\forall t\in[0,1]$。

4． $Klein$瓶

将圆柱面每一直母线段两端粘合,两个截口以相反的方向粘接，得到$Klein$瓶。

等价关系：$(0,t)\sim(1,t)$，$(t,0)\sim(1-t,1)$，$\forall t\in[0,1]$。

5． 射影平面

将圆盘D^2的边界S^1上每一对对径点粘合，得到射影平面。

二、 商空间

用商空间的观点理解“ 粘合 ”的方法。以环面T^2为例：记X是用来粘制T^2的圆柱面。粘合过程规定了从X到T^2的连续映射f。记$\sim$是粘合决定的等价关系，$g: X/\sim \to T^2$相应的一一对应关系，于是$f = g \circ p$。因为f连续，所以g连续。

由于X紧致和p连续，$X/\sim$是紧致的，而T^2是$Hausdorff$空间，根据定理 2.6，连续的一一对应g是同胚。

也就是说，在拓扑的意义上看，T^2就是商空间$X/\sim$。

三、 例子

1. 设A是拓扑空间X的一个子集（通常是闭子集），把A捏为一点（即等价关系是$(A\times A)\cup\{(x,x) \mid x \in X - A\}$），得到的商空间记作$X/A$。

2. 拓扑锥

$$CX = X\times[0,1]/X\times\{1\}$$

3. 几何锥

$X \subset \mathbb{R}^n$，取$a \in \mathbb{R}^{n+1} - \mathbb{R}^n$，规定$\mathbb{R}^{n+1}$的子集

$$aX = \{ta + (1-t)x \mid t \in [0,1], x \in X\}$$

4. 贴空间

$$X_1 \coprod X_2 \cong X_1 \times\{0\} \cup X_2 \times\{1\}$$

$$\tau = \{U \subset X_1 \coprod X_2 \mid U \cap X_i \in \tau_i, i = 1, 2\}$$

称$(X_1 \coprod X_2, \tau)$为(X_1, τ_1)与(X_2, τ_2)的拓扑和。记作$X_1 \coprod X_2$。

设X与Y是两个拓扑空间，$A \subset X$，$f: A \to Y$连续，在$X \coprod Y$中规定等价关系$\sim$，使得等价类为下面两种形式：

（1）$X - A$中的单个点；

（2）$\{y\} \cup f^{-1}(y), \forall y \in Y$。

称商空间$X \coprod Y/\sim$为映射f的帖空间，记作$Y \cup_f X$。

5． 映射柱

$f: X \to Y$，$Y \coprod X \times [0,1] \big/ \sim$，$\sim: (x,0) \sim f(x)$。

6． 映射锥

$f: X \to Y$，$C_f = Y \coprod CX \big/ \sim$，$\sim: [(x,0)] \sim f(x)$。

7． Wedge product

$$X \vee Y = X \coprod Y \big/ x_0 \sim y_0$$

8． Smash product

$$X \wedge Y = X \times Y / X \vee Y$$

作业：写出下列哪些空间是同胚的：

（1）平面E^2 （2）球面S^2

（3）圆盘$B^2 = \{(x,y) \in E^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\}$

（4）平环$\{(x,y) \in E^2 \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 2\}$

（5）圆柱的侧面$S^1 \times [0,1]$ （6）B^2 / S^1

（7）球面去掉一点$S^2-\{x\}$（8）$B^2\cup_i B^2$，$i:S^1\to B^2$包含映射。

（9）$S^1\times S^1$ （10）$S^1\times[0,1]/S^1\times\{1\}$

答案：1．（1）$\cong$（7）

2．（2）$\cong$（6）$\cong$（8）

3．（3）$\cong$（10）

4．（4）$\cong$（5）

5．（9）