连通性（二）

引理 若X_0是X的既开又闭的子集，A是X的连通子集，则或者$A\bigcap X_0=\phi$，或者$A\subset X_0$。

证 $A\bigcap X_0$是A的既开又闭的子集，因A是X的连通子集，故$A\bigcap X_0=\phi$或$A\bigcap X_0=A$，即$A\subset X_0$。

命题 2.22 若X有一个连通的稠密子集，则X连通。

证 设A是X的连通稠密子集，X_0是X的既开又闭的子集。若$X_0\neq\varnothing$，则$A\bigcap X_0\neq\phi$，由引理知$A\subset X_0$。于是

$$X=\overline{A}\subset\overline{X}_0=X_0,$$

从而$X_0=X$，因此，X 连通。

推论 若A是X的连通子集，$A\subset Y\subset\overline{A}$，则$Y$连通。

命题 2.23 如果X有一个连通覆盖μ（ μ中每个成员都连通），并且X有一个连通子集A，它与μ中每个成员都相交，则X连通。

*Example*1

$$A=\{(x,\sin\frac{1}{x})\,|\,x\in(0,1)\},\quad B=\{(0,y)\,|-1\le y\le 1\},$$

$X=A\bigcup B$，则X连通。

证 因$A\cong(0,1)$，$\overline{A}=X$，故X连通。

*Example*2 $\mathbb{R}^2$连通。

证 设$B_x=\{(x,y)\mid y\in\mathbb{R}\}$,则$\{B_x\mid x\in\mathbb{R}\}$是$\mathbb{R}^2$的连通开覆盖。记$A=\{(x,0)\mid x\in\mathbb{R}\}$，则$A$连通，且$A\bigcap B_x\neq\varnothing$，由命题2.23知$\mathbb{R}^2$连通。

$Example3$ $\mathbb{R}^n$连通。（道路连通，去掉可数个点还是道路连通）

$Example4$ S^n连通。

证 $S^n-\{x\}\cong\mathbb{R}^n$连通，$S^n-\{x\}$是$S^n$的稠密子集，故$S^n$连通。

定理 2.8 连通性是可乘的。

证 设X和Y都是连通空间，则$\{X\times\{y\}\mid y\in Y\}$是$X\times Y$的连通覆盖。取$x\in X$，则$\{x\}\times Y$连通，且与每个$X\times\{y\}$都相交，故$X\times Y$连通。

连通分支

定义 2.7 拓扑空间X的一个子集称为X的**连通分支**，如果它是连通的，并且不是X的其他连通子集的真子集。（极大连通子集）

命题 2.24 X的每个非空连通子集包含在唯一的一个连通分支中。

证 （存在性）设A是X的一个非空连通子集，设

$\mu = \{F \subset X \mid F$ 连通，$F \bigcap A \neq \varnothing$。$Y = \bigcup_{F \in \mu} F$，则 $A \subset Y$。根据命题 2.23，Y 连通。若连通子集 $B \supset Y$，则 $B \bigcap A = A \neq \varnothing$，从而 $B \in \mu$。故 Y 是连通分支。

（唯一性）若 Y' 也是包含 A 的连通分支，则 $Y' \in \mu$，因而 $Y' \subset Y$。由 Y' 的极大性得 $Y' = Y$。

*Example*1　$\mathbb{Q}$ 中的连通分支是单点集。

命题 2.25　连通分支是闭集。

证　设 A 是 X 的一个连通分支，根据命题 2.22，$\overline{A}$ 连通。由 A 的极大性知 $\overline{A} = A$。因此 A 是闭集。