

定理 2.6 设 $f: X \rightarrow Y$ 是连续的一一对应, 其中 X 紧致, Y 是 Hausdorff 空间, 则 f 是同胚。

证 只要证 $f^{-1}: Y \rightarrow X$ 连续, 只需证 f 是闭映射 (Lemma1)。设 A 是 X 的闭集, 则 A 是紧致的 (Lemma3)。故 $f(A)$ 是 Y 的紧致子集 (Lemma4)。所以 $f(A)$ 是 Y 的闭集 (Lemma6)。

Lemma1 如果 $f: X \rightarrow Y$ 是一一对应, 则 f 是开映射 \Leftrightarrow f 是闭映射 $\Leftrightarrow f^{-1}$ 连续。

证 \Rightarrow 设 B 是 X 的闭集, 则 B^c 是 X 的开集, 于是 $f(B^c)$ 是 Y 的开集, 而 $f: X \rightarrow Y$ 是一一对应, 故 $f(B) = Y - f(B^c)$ 是 Y 的闭集。

\Rightarrow 设 B 是 X 的闭集, 则 $(f^{-1})^{-1}(B) = f(B)$ 是 Y 的闭集, 故 f^{-1} 连续。

\Rightarrow 设 U 是 X 的开集, 因 f^{-1} 连续, $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$ 是 Y 的开集, 故 f 是开映射。

Lemma2 A 是 X 的紧致子集 $\Leftrightarrow A$ 在 X 中的任一开覆盖有有限子覆盖。

证 \Rightarrow 设 μ 是 A 在 X 中的开覆盖, 则 $\mu_A = \{U \cap A \mid U \in \mu\}$ 是 A 的开覆盖。因为 A 紧致, 所以 μ_A 有有限子覆盖 $\{U_1 \cap A, U_2 \cap A, \dots, U_n \cap A\}$ 。则 $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ 是 μ 的有限子覆盖。

\Leftarrow 设 ν 是 A 的开覆盖, 则由子空间拓扑的定义, $\forall V \in \nu, \exists U, \text{ 使得 } V = U \cap A$ 。所有得到的 U 构成 A 在 X 中的开覆盖 μ 。由条件,

μ 有子覆盖 $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ 。于是 $\{U_1 \cap A, U_2 \cap A, \dots, U_n \cap A\}$ 是 ν 的有限子覆盖。故 A 是 X 的紧致子集。

Lemma3 紧致空间的闭子集紧致。

证 设 X 紧致， A 是 X 的闭子集， μ 是 A 在 X 中的开覆盖。故 $\mu \cup A^c$ 是 X 的开覆盖。因 X 紧致，故 $\mu \cup A^c$ 中存在有限子覆盖 $\{U_1, U_2, \dots, U_n, A^c\}$ 。于是 $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ 是 μ 的有限子覆盖。故 A 紧致。

Lemma4 紧致空间在连续映射下的像也紧致。

证 设 X 紧致，映射 $f: X \rightarrow Y$ 连续，要证 $f(X)$ 是 Y 的紧致子集。设 μ 是 $f(X)$ 在 Y 中的开覆盖。则 $\{f^{-1}(U) | U \in \mu\}$ 是 X 的开覆盖，有有限子覆盖 $\{f^{-1}(U_1), f^{-1}(U_2), \dots, f^{-1}(U_n)\}$ ，即 $X = \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(U_i)$ 。于是 $f(X) = \bigcup_{i=1}^n f(f^{-1}(U_i)) \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$ 。因此 $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ 是 μ 的有限子覆盖。根据 *Lemma3*， $f(X)$ 是 Y 的紧致子集。

推论：紧致性具有同胚不变性。即 X 紧致，映射 $f: X \rightarrow Y$ 是同胚映射，则 Y 紧致。

应用 1： $(0,1)$ 与 $[0,1]$ 不同胚。

应用 2： S^1 与 $(0,1)$ 不同胚。（ S^1 与 $[0,1]$ 不同胚。）

应用 3： $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ 连续，则 f 不是满映射。（ f 也不是单映射）

Lemma5 若 A 是 Hausdorff 空间 X 的紧致子集， $x \notin A$ ，则 x 与 A 有不相交的邻域。

证 $\forall y \in A$ ，则 $x \neq y$ 。因 X 是 Hausdorff 空间，故 $\exists x$ 和 y 的开邻域 U_y 和 V_y ，有 $U_y \cap V_y = \emptyset$ 。而 $A \subset \bigcup_{y \in A} V_y$ ，因 A 紧致，故有有限

子覆盖 $\{V_{y_1}, V_{y_2}, \dots, V_{y_n}\}$ 。令 $U = \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}$ ， $V = \bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$ ，则 U 是 x 的邻域， V 是 A 的邻域。且

$$U \cap V = U \cap \left(\bigcup_{i=1}^n V_{y_i} \right) = \bigcup_{i=1}^n (U \cap V_{y_i}) \subset \bigcup_{i=1}^n (U_{y_i} \cap V_{y_i}) = \emptyset, \text{ 故}$$

$U \cap V = \emptyset$ ，即 x 与 A 有不相交的邻域。

Lemma6 Hausdorff 空间的紧致子集是闭集。

证 设 A 是 X 的闭子集，由 *Lemma5* 知， $\overline{A} = A$ ，故 A 是闭集。