乘积空间的紧致性

易知紧致性没有遗传性。但有可乘性，先证以下引理：

引理 设A是X的紧致子集，y是Y的一点，在乘积空间$X\times Y$中，W是$A\times\{y\}$的邻域，则存在A和y的开邻域U和V，使得$U\times V\subset W$。

证：$\forall x\in A$，则(x,y)是W的内点，因此$\exists x,y$的开邻域U_x,V_x，使得$U_x\times V_x\subset W$，而$\{U_x\mid x\in A\}$是A在X中的开覆盖，又A紧致，$\{U_x\mid x\in A\}$有有限子覆盖$\{U_{x_1},\cdots,U_{x_n}\}$。令$U=\bigcup_{i=1}^{n}U_{x_i}$，$V=\bigcap_{i=1}^{n}V_{x_i}$。则$U$和$V$分别是$A$和$y$的开邻域，且$U\times V\subset\bigcup_{i=1}^{n}(U_{x_i}\times V_{x_i})\subset W$。

定理 2.7 若X与Y都紧致，则$X\times Y$也紧致。

证：设μ是$X\times Y$的开覆盖，要证它有有限子覆盖。$\forall y\in Y$，则$X\times\{y\}\cong X$，从而是紧致的。μ也是它在$X\times Y$中的开覆盖，有有限子覆盖。即存在μ中有限个开集，他们的并集W_y是$X\times\{y\}$的邻域。由引理，有y的邻域V_y，使得$X\times V_y\subset W_y$，因而$X\times V_y$被μ中有限个开集覆盖。$\{V_y\mid y\in Y\}$是紧空间Y的开覆盖，有有限子覆盖$\{V_{y_1},\cdots,V_{y_n}\}$，于是即$X\times Y=\bigcup_{i=1}^{n}(X\times V_{y_i})$，其中每个$X\times V_{y_i}$都被$\mu$中有限个开集覆盖。于是$X\times Y$被$\mu$中有限个成员覆盖。

命题 1：$[0,1]$是紧致空间。

推论：$\underbrace{[0,1]\times\cdots\times[0,1]}_{n}$ 紧致。

命题 2：紧致度量空间是有界的。

证：$\{B(x_i,1)\,|\,x_i\in X\}$ 是 X 的开覆盖，有有限子覆盖，$\{B(x_1,1),\cdots,B(x_n,1)\}$。令

$$M=\max\{d(x_i,x_j)\,|\,1\le i<j\le n\}$$

$\forall x,y\in X$，$\exists B(x_i,1),B(x_j,1)$，有 $x\in B(x_i,1),y\in B(x_j,1)$，于是

$$d(x,y)\le d(x,x_i)+d(x_i,x_j)+d(x_j,y)\le M+2$$

所以 X 有界。

命题 3：A 是 $\mathbb{R}^n$ 的紧致子集 $\Leftrightarrow$ A 是有界闭集。

证：$\Rightarrow$ 易知。

$\Leftarrow$ $A\subset[-N,N]^n$，而紧致空间的闭子集紧致。

紧致度量空间

命题 2.10 紧致 C_1 空间是列紧的。

度量空间 (X,d) 的子集 A 称为 X 的一个 $\delta-$网（$\delta>0$），如果 $\forall x\in X,d(x,A)<\delta$，即 $\bigcup\limits_{a\in A}B(a,\delta)=X$。

命题 2.11 对任给 $\delta>0$，列紧度量空间存在有限的 $\delta-$网。

设 μ 是列紧度量空间 (X,d) 的一个开覆盖，$X\notin\mu$。定义

$\varphi_\mu(x)=\sup\{d(x,U^C)\,|\,U\in\mu\}$。则 φ_μ 是 X 上的连续函数。

定义 2.3 设 μ 是列紧度量空间 (X,d) 的一个开覆盖，$X\notin\mu$，称函数 φ_μ 的最小值为 μ 的 *Lebesgue* 数，记作 $L(\mu)$。

命题 2.12 $L(\mu)$ 是正数；并且当 $0<\delta<L(\mu)$ 时，$\forall x\in X$，$B(x,\delta)$

必包含在μ的某个开集U中。

命题 2.13 列紧度量空间是紧致的。

定理 2.5 若X是度量空间，则X列紧$\Leftrightarrow X$紧致。

（**2004 浙大考研试题**）若一族开区间$\{I_\alpha\}$覆盖了闭区间$[0,1]$，则必存在一个正数$\delta>0$，使得$[0,1]$中的任意两点x_1,x_2满足$|x_1-x_2|<\delta$时，必属于某个开区间$I_\beta\in\{I_\alpha\}$。

证明：（1）作函数$f:[0,1]\to\mathbb{R}$，$x\mapsto\sup\{d(x,{I_\alpha}^C)\mid\alpha\in\Gamma\}$

则f连续，且$f(x)>0$。而闭区间上的连续函数一定有最小值，令

$\delta=\dfrac{1}{2}\min\{f(x)\mid x\in[0,1]\}$。

（2）$\forall x\in X$，$0<\delta<f(x)$，因此存在I_α，使得$d(x,{I_\alpha}^C)>\delta$，从而$(x-\delta,x+\delta)\subset I_\alpha$。

（3）而满足$|x_1-x_2|<\delta$的点x_1,x_2必在某个$(x-\delta,x+\delta)$中，从而命题得证。