第二节　Urysohn 引理及其应用

Th2.2（Urysohn 引理）如果拓扑空间 X 满足 T_4 公理，则对于 X 的任意两个不相交闭集 A 和 B，存在 X 上的连续函数 f，它在 A 和 B 上分别取值为 0 和 1。

注 1：Urysohn 引理的结论是 T_4 公理的等价条件。

Th2.3（Tietze 扩张定理）如果拓扑空间 X 满足 T_4 公理，则定义在 X 的闭子集 F 上的连续函数可以连续地扩张到 X 上。

注 2：Tietze 扩张定理的结论是 T_4 公理的等价条件。

一个拓扑空间 (X,τ) 称为**可度量化**的，如果可以在集合 X 上规定一个度量 d，使得 $\tau_d=\tau$。

Pro1.　拓扑空间 X 可度量化 $\Leftrightarrow$ 存在从 X 到一个度量空间的嵌入映射。

Pro2. 拓扑空间 X 的可度量化性质具有同胚不变性。即若 $X\cong Y$，X 可度量化，则 Y 也可度量化。

证明：设集合 X 上度量 d，满足 $\tau_d=\tau$，$f:X\to Y$ 是同胚映射。规定集合 Y 上的度量 $\rho(x,y)=d(f^{-1}(x),f^{-1}(y))$，则需证明 ρ 是 Y 上的度量，由 ρ 诱导的拓扑就是 Y 上原来的拓扑。

（1）$\rho(x,y)=0\Leftrightarrow d(f^{-1}(x),f^{-1}(y))=0\Leftrightarrow f^{-1}(x)=f^{-1}(y)\Leftrightarrow x=y$；

（2）$\rho(x,y)=d(f^{-1}(x),f^{-1}(y))=d(f^{-1}(y),f^{-1}(x))=\rho(y,x)$；

（3）$\rho(x,y)+\rho(y,z)\geq d(f^{-1}(x),f^{-1}(y))+d(f^{-1}(y),f^{-1}(z))$

$$\geq d(f^{-1}(x),f^{-1}(z))=\rho(x,z)$$

故 ρ 是 Y 上的度量。

设 Y 上原来的拓扑为 τ'，则 $\tau' = \{U \mid U = f(V), V \in \tau\}$。而

$\tau' = \{U \mid U = f(V), V \in \tau\} = \{U \mid U$ 是若干个 $f(B_d(x,\varepsilon))$ 的并$\}$（$\varepsilon > 0$）。

$$f(B_d(x,\varepsilon)) = f(\{y \mid d(y,x) < \varepsilon\}) = \{f(y) \mid d(y,x) < \varepsilon\} = B_\rho(f(x),\varepsilon)$$

$\tau_\rho = \{U \mid U$ 是若干个 $B_\rho(y,\varepsilon)$ 的并$\}$（$y \in Y, \varepsilon > 0$）。于是 $\tau' = \tau_\rho$。

Th2.4 （度量化定理）拓扑空间 X 如果满足 T_1, T_4 和 C_2 公理，则 X 可嵌入到 $Hilbert$ 空间 E^ω 中。

Th2.5 若拓扑空间 X 是 T_2 空间，则 X 可度量化 $\Leftrightarrow$ X 具有 σ 局部有限基。

作业：P49 Ex2、Ex4