1.3 可数公理

邻域系：设 $x\in X$ ，把X的所有邻域的集合称为 x 的**邻域系**，记作 $N(x)$。

邻域基：$N(x)$的一个子集Γ称为X的一个**邻域基**，如果X的每个邻域至少包含Γ中的一个成员。

EX1. $N(x)$本身为X的一个邻域基。X的所有开邻域构成X的一个邻域基。

EX2. 若Γ是拓扑空间X的拓扑基，则$\Omega=\{B\in\Gamma\mid x\in B\}$是$X$的一个邻域基。

EX3. 对于度量空间(X,d)， $x\in X$ ，$\{B(x,\varepsilon)\mid\varepsilon>0\}$是$X$的一个邻域基。$\{B(x,q)\mid q\text{为正有理数}\}$是$X$的一个邻域基。$\{B(x,\frac{1}{n})\mid n\in\mathbb{N}\}$也是$X$的一个邻域基。

C_1**公理**：任意一点都有可数的邻域基。

EX4. 对于度量空间(X,d)，$\{B(x,q)\mid q\text{为正有理数}\}$是$X$的一个可数邻域基。$\{B(x,\frac{1}{n})\mid n\in\mathbb{N}\}$也是$X$的一个可数邻域基。故度量空间满足$C_1$公理。

EX5. $(\mathbb{R},\tau_f)$不满足C_1公理。

Pro.1 如果X在x处有可数邻域基，则x有可数邻域基$\{V_n\}$，使得$m>n$时，$V_m\subset V_n$。

Pro.2 若X是C_1空间，$A\subset X, x\in\overline{A}$，则$A$中存在收敛到$x$的序列。

Col. 若X是C_1空间，$x_0\in X$ ，映射$f:X\to Y$满足：当$x_n\to x_0$时，$f(x_n)\to f(x_0)$，则f在x_0连续。

C_2 **公理**：有可数拓扑基。

EX6. 由离散度量诱导出的拓扑空间不是 C_2 空间。

C_2 空间 $\Rightarrow C_1$ 空间，事实上，若 X 有可数拓扑基 Γ，则任意点 x 有可数的邻域基 $\{B \in \Gamma \mid x \in B\}$。

C_2 空间是可分空间。

Pro.3 可分度量空间是 C_2 空间。

EX7. *Hilbert* 空间 E^{ϖ} 是度量空间，规定内积

$(\{x_n\},\{y_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$，它决定度量 ρ：

$\rho(\{x_n\},\{y_n\}) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - y_n)^2}$。

Th2.1 (*Lindelöf* **定理**) 若拓扑空间 X 满足 C_2，T_3 公理，则它也满足 T_4 公理。

1.4 拓扑空间的遗传性与可乘性

一种拓扑性质称为有**遗传性**的，如果一个拓扑空间具有它时，子空间也具有它；一种拓扑性质称为有**可乘性**的，如果两个拓扑空间具有它时，它们的乘积空间也具有它。

EX8. 可分性是可乘的，但不具有遗传性。

T_1, T_2, T_3 公理都有遗传性和可乘性。

T_4 公理没有遗传性和可乘性。

C_1 公理和 C_2 公理都有遗传性和可乘性。

例题：

证明 X 为 Hausdorff 空间**当且仅当** $\Delta(X) = \{(x,x) \mid x \in X\}$ 是乘积空

间 $X\times X$ 的闭集。

证明：（必要性）要证 $\Delta(X)$ 为闭集，只要证它的余集是开集。

$\forall(x,y)\in(\Delta(X))^C$，$(x,y)$ 为内点。由 $(x,y)\in(\Delta(X))^C$ 知，$x\neq y$，因 X 为 Hausdorff 空间知，存在 x 的开邻域 U，y 的开邻域 V，使得 $U\bigcap V=\Phi$，于是 $(x,y)\in U\times V\subset(\Delta(X))^C$，所以 (x,y) 为内点，这就证明了 $\Delta(X)$ 为闭集。

（充分性）对 $\forall x,y\in X,x\neq y$，由 $\Delta(X)$ 的定义知，$(x,y)\notin\Delta(X)$，即 $(x,y)\in(\Delta(X))^C$，由 $\Delta(X)$ 为闭集知：$\Delta(X)^C$ 为开集，于是存在开集 U,V 使得 $(x,y)\in U\times V\subset(\Delta(X))^C$，由 $U\times V\subset(\Delta(X))^C$ 知，U,V 为 x,y 的不相交的邻域，这就证明了 X 为 Hausdorff 空间。

作业：

P.43　Ex 7　Ex 16　Ex 18