第二节 连续映射与同胚映射

2．1 连续映射的定义

Def. 1（在一点连续） 设 X 和 Y 都是拓扑空间，$f: X \to Y$，$x \in X$。如果 $f(x)$ 的任意一个邻域 V（在 Y 中），$f^{-1}(V)$ 总是 x 的邻域（在 X 中），则称 f 在 x 处连续。

Pro. 1 设 $f: X \to Y$ 是映射，$A \subset X$，$x \in A$。若 $f|A: A \to Y$ 是 f 在 A 上的限制，则

（1）如果 f 在 x 处连续，则 $f|A$ 在 x 处也连续。

（2）若 A 是 x 的邻域，则当 $f|A$ 在 x 处连续时，f 在 x 处也连续。

Def. 2 设 $f: X \to Y$ 是映射，$\forall x \in X$，若 f 在 x 处连续，则称 f 是**连续映射**。

Th. 1 设 $f: X \to Y$ 是一个映射，则下列条件两两等价：

（1） f 是连续映射；

（2） Y 的开集在 f 下的原像是 X 的开集；

（3） Y 的闭集在 f 下的原像是 X 的闭集；

（4）若 $A \subset X$，则 $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$；

（5）若 $B \subset Y$，则 $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$。

2．2 连续映射的性质

下列映射一定连续：

1、恒等映射：$id: X \to X$，其中两个 X 有相同的拓扑。

2、 包含映射：$i: A \to X$ ，其中 A 是 X 的子空间拓扑。

3、常值映射

4、 $f: X \to Y$，其中 X 是离散的拓扑空间，或 Y 是平凡的拓扑空间，

Pro. 2 设 X, Y 和 Z 都是拓扑空间，映射 $f: X \to Y$ 在 x 处连续，$g: Y \to Z$ 在 $f(x)$ 处连续，则复合映射 $g \circ f: X \to Z$ 在 x 处连续。

Th. 2 （粘接引理）设 $\{A_1, A_2, \cdots A_n\}$ 是 X 的一个有限闭覆盖（或开覆盖），如果映射 $f: X \to Y$ 在每个 A_i 上的限制都是连续的，则 f 是连续映射。

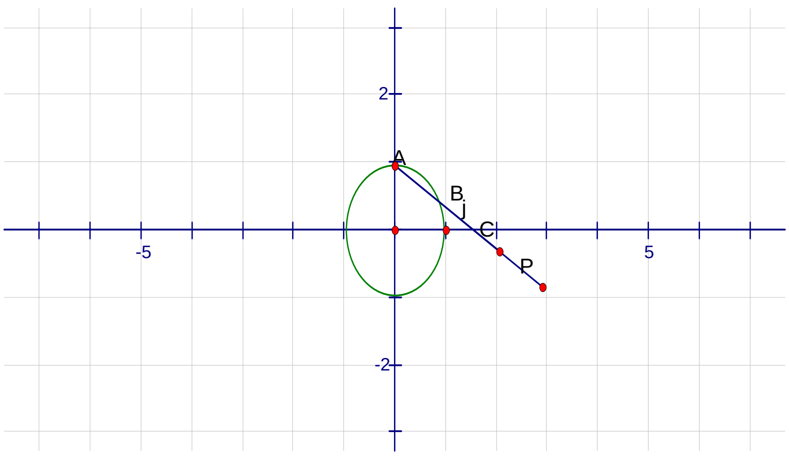
2．3 同胚映射

Def. 3 如果 $f: X \to Y$ 是一一对应，并且 f 和 f^{-1} 都连续，则称 f 是一个同胚。只要存在从 X 到 Y 的一个同胚映射，就称 X 与 Y 同胚，记作 $X \cong Y$。

例

Ex.1 证明 $S^n - \{(o, o, \cdots, o, 1)\} \cong \mathbb{R}^n$

证 首先设 $S^n - \{(o, o, \cdots, o, 1)\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$



$A = (0, 0, \cdots 0, 1) \quad B = (x_1, x_2, \cdots x_n, x_{n+1}) \quad C = (y_1, y_2, \cdots 0)$

直线 AB 方程为：$\dfrac{y_1 - 0}{x_1 - 0} = \dfrac{y_2 - 0}{x_2 - 0} = \dfrac{y_3 - 0}{x_3 - 0} = \cdots\cdots = \dfrac{y_{n+1} - 1}{x_{n+1} - 1}$

令$y_{n+1}=0$,则$y_1=\dfrac{x_1}{1-x_{n+1}}, y_2=\dfrac{x_2}{1-x_{n+1}},\cdots\cdots y_n=\dfrac{x_n}{1-x_{n+1}}$

因此 f（B）$=C=\left(\dfrac{x_1}{1-x_{n+1}},\dfrac{x_2}{1-x_{n+1}},\cdots\cdots\dfrac{x_n}{1-x_{n+1}},0\right)$

下面求 f 的逆映射，为此令

$$\frac{x_1-0}{y_1-0}=\frac{x_2-0}{y_2-0}=\frac{x_3-0}{y_3-0}=\cdots\cdots=\frac{x_{n+1}-1}{0-1}=t$$

则 $x_1=y_1t, x_2=y_2t,\cdots, x_n=y_nt, x_{n+1}=1-t$，又$x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2+x_{n+1}{}^2=1$

$$\Rightarrow t+y_1{}^2t+y_2{}^2t+\cdots+t_n{}^2t=2\Rightarrow t=\frac{2}{1+y_1{}^2+y_2{}^2+\cdots+y_n{}^2}$$

从而$x_1=\dfrac{2y_1}{1+y_1{}^2+y_2{}^2+\cdots+y_n{}^2}, x_2=\dfrac{2y_2}{1+y_1{}^2+y_2{}^2+\cdots+y_n{}^2},\cdots\cdots$

$x_n=\dfrac{2y_n}{1+y_1{}^2+y_2{}^2+\cdots+y_n{}^2}, x_{n+1}=1-\dfrac{2}{1+y_1{}^2+y_2{}^2+\cdots+y_n{}^2}$

因此 $f^{-1}(C)=B=$

$$=\left(\frac{2y_1}{1+y_1{}^2+y_2{}^2+\cdots+y_n{}^2},\cdots\cdots\frac{2y_n}{1+y_1{}^2+y_2{}^2+\cdots+y_n{}^2},1-\frac{2}{1+y_1{}^2+y_2{}^2+\cdots+y_n{}^2}\right)$$

因此，由 f 和 f^{-1}的连续性知，$S^n-\{(o,o,\cdots,o,1)\}\cong\mathbb{R}^n$.

Ex. 2

(1) 设 X 为全体实数集，$\tau=\{B\subset X\mid B^c$为有限集或整个$X\}$，验证$\tau$是一个拓扑；

(2) 定义 $f:E^1\to X$ 使 $f(x)=x$，则 f 是连续映射，但不是同胚映射。

思考题

1.学了乘积空间和商空间后，写出下列哪些空间是同胚的：

（1）平面E^2　　（2）球面S^2

（3）圆盘 $B^2=\{(x,y)\in E^2\mid x^2+y^2\le 1\}$

（4）平环$\{(x,y)\in E^2 \mid 1\le x^2+y^2\le 2\}$

（5）圆柱的侧面$S^1\times[0,1]$　　（6）B^2/S^1

（7）球面去掉一点$S^2-\{x\}$　　（8）$B^2\cup_i B^2$

（9）$S^1\times S^1$　　（10）$S^1\times[0,1]/S^1\times\{1\}$

2．证明：$[0,1]$与$[0,1)$不同胚。（学了紧性之后考虑）

3．设$A\subseteq E^1$，证明：（1）不存在S^1到E^1上的连续满射。

（2）不存在S^1到A上的连续满单射。（学了连通性之后考虑）

作业 P.28　ex.2、ex.4、ex.9、ex.12.