第一章 拓扑空间与连续映射

（2005.3.3 第 3、4 节课）

一、上次课已给出拓扑空间的定义，我们先复习**拓扑空间的含义**.

- **拓扑空间** (X,τ) 或 X 是由一个集合 X 和一个**拓扑结构** τ 组成，这里 $\tau \subset 2^X$ 满足

（1） $\Phi,\ X\in\tau$

（2） 若 $A,B\in\tau$，则 $A\cap B\in\tau$（有限交运算封闭）

(3)若 $A_i\in\tau\ \ (i\in I)$，则 $\bigcup_{i\in I}A_i\in\tau$（任意并运算封闭）

- τ 中的成员称为开集

二、下面给出**拓扑空间的例子**

- **例 1　平庸**拓扑 $\tau=\{\Phi,X\}$.

- **例 2　离散**拓扑 $\tau=2^X$.

- **例 3　Sierpinsky 空间**：$X=\{0,1\}$，$\tau=\{\Phi,\{0\},\{0,1\}\}$.

- **例 4**　$X=\{0,1,2\}$ 上的所有拓扑（29 个）：

2 个开集的共有 1 个：$\{\Phi,\{0,1,2\}\}$,

3 个开集的共有 6 个：

$\{\Phi,\{0\},\{0,1,2\}\}$, $\{\Phi,\{1\},\{0,1,2\}\}$，$\{\Phi,\{2\},\{0,1,2\}\}$，

$\{\Phi,\{1,2\},\{0,1,2\}\}$，$\{\Phi,\{0,1\},\{0,1,2\}\}$, $\{\Phi,\{0,2\},\{0,1,2\}\}$

4 个开集的共有 9 个：

$\{\Phi,\{0\},\{0,1\},\{0,1,2\}\}$，$\{\Phi,\{0\},\{0,2\},\{0,1,2\}\}$，$\{\Phi,\{1\},\{1,2\},\{0,1,2\}\}$，

$\{\Phi,\{1\},\{0,1\},\{0,1,2\}\}$，$\{\Phi,\{2\},\{0,2\},\{0,1,2\}\}$，$\{\Phi,\{2\},\{1,2\},\{0,1,2\}\}$，

$\{\Phi,\{0\},\{1\},\{0,1\},\{0,1,2\}\}$，$\{\Phi,\{0\},\{2\},\{0,2\},\{0,1,2\}\}$，$\{\Phi,\{1\},\{2\},\{1,2\},\{0,1,2\}\}$

5 个开集的共有 6 个：

$\{\Phi,\{0\},\{0,2\},\{0,1\},\{0,1,2\}\}$，$\{\Phi,\{1\},\{1,2\},\{0,1\},\{0,1,2\}\}$，

$\{\Phi,\{2\},\{1,2\},\{0,2\},\{0,1,2\}\}$，$\{\Phi,\{1\},\{2\},\{1,2\},\{0,1,2\}\}$

$\{\Phi,\{0\},\{1\},\{0,1\},\{0,1,2\}\}$，$\{\Phi,\{0\},\{2\},\{0,2\},\{0,1,2\}\}$

6 个开集的有 6 个：

$\{\Phi,\{0\},\{1\},\{0,2\},\{0,1\},\{0,1,2\}\}$, $\{\Phi,\{0\},\{1\},\{1,2\},\{0,1\},\{0,1,2\}\}$,

$\{\Phi,\{1\},\{2\},\{1,2\},\{0,2\},\{0,1,2\}\}$, $\{\Phi,\{1\},\{2\},\{1,2\},\{0,1\},\{0,1,2\}\}$,

$\{\Phi,\{0\},\{2\},\{0,1\},\{0,2\},\{0,1,2\}\}$, $\{\Phi,\{0\},\{2\},\{1,2\},\{0,2\},\{0,1,2\}\}$

8 个开集的有 1 个：

$\{\Phi,\{0\},\{1\},\{2\},\{1,2\},\{0,2\},\{0,1\},\{0,1,2\}\}$

因此共有 1+6+9+6+6+1＝29 个拓扑，

- **例 5　有限余拓扑**：$\tau=\{X-A\mid A$ 为 X 的有限子集$\}\cup\{\Phi\}$

- **例 6　可数余拓扑**：设 $X\neq\Phi$，则 $\tau=\{X-A\mid A$ 为 X 的有限子集$\}\cup\{\Phi\}$ 为 X 的拓扑.

● **例 7　由度量空间所诱导的拓扑**（下面先给出度量空间的定义和例子.）

定义 设 X 为集合, 若映射 $d: X\times X\to \mathbf{R}$ 满足

[M1]　$d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$

[M2]　$d(x,y)\le d(x,z)+d(y,z)$.

则称 d 为 X 上的一个**度量**,并称 (X,d) 或 X 为**度量空间**, 称 $d(x,y)$ 为 x 到 y 的**距离**:

【注 1】上述的两条公理与下面的三条等价：

1)　$d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$

2)　$d(x,y)=d(y,x)$　（对称性）

3)　$d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$ (三角不等式)

【注 2】　$d(x,y)$ 有非负性：$d(x,y)\ge 0$

下面给出两个度量空间的例子.

● **例 1　n维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$,欧氏距离** $d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots(x_n-y_n)^2}$

利用柯西（Cauchy）不等式 $(\sum_{i=1}^{n}|a_ib_i|)^2\le\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\cdot\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2$

● **例 2　n维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$,与欧氏距离本质上相同的距离** $d(x,y)=(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$，　$p\ge 1$.

证　先证 $A^{\frac{1}{p}}B^{\frac{1}{q}}\le\frac{A}{p}+\frac{B}{q}$ （$A\ge 0, B\ge 0$）

再证 Hölder 不等式 $\sum_{i=1}^{n}|a_ib_i|\le(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p)^{\frac{1}{p}}\cdot(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q)^{\frac{1}{q}}$，　$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，　$p>1, q>1$，

设 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，　$p>1, q>1$，　$\|a\|=(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p)^{\frac{1}{p}}$，$\|b\|=(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q)^{\frac{1}{q}}$，　$A_i=\left(\frac{a_i}{\|a\|}\right)^p$，　$B_i=\left(\frac{b_i}{\|b\|}\right)^q$，则由

$A_i^{\frac{1}{p}}B_i^{\frac{1}{q}}\le\frac{A_i}{p}+\frac{B_i}{q}$ 知，$\sum_{i=1}^{n}A_i^{\frac{1}{p}}B_i^{\frac{1}{q}}\le\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{p}+\sum_{i=1}^{n}\frac{B_i}{q}=1$

下证 $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$

当时 $p=1$ 显然，故只需证 $p>1$ 的情形. 记 $a_i=|x_i-y_i|$，$b_i=|z_i-y_i|$，则

$$\sum_{i=1}^{n}a_i(a_i+b_i)^{\frac{p}{q}}\le\left(\sum_{i=1}^{n}a_i{}^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{\frac{1}{q}}，\quad \sum_{i=1}^{n}b_i(a_i+b_i)^{\frac{p}{q}}\le\left(\sum_{i=1}^{n}b_i{}^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p=\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{1+\frac{p}{q}}=\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)(a_i+b_i)^{\frac{p}{q}}\le\left(\left(\sum_{i=1}^{n}{a_i}^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}{b_i}^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

因此 $d(x,y)\le(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p)^{\frac{1}{p}}=(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p)^{1-\frac{1}{q}}\le\left(\sum_{i=1}^{n}{a_i}^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}{b_i}^p\right)^{\frac{1}{p}}$

- **开球**

在度量空间 (X,d) 中，$\{y\in X\mid d(y,x)<\delta\}$ 是 X 中的子集，记作 $B(x,\delta)$. 我们称 $B(x,\delta)$ 为 X 中以 x 为中心、以 δ 为半径的**开球**，其中 δ 必须是正数。

- 度量空间中的**开集**

X 为度量空间，$G\subset X$. 若 G 中任何一点都有一个以此点为心的开球含在 G 中, 则我们称 G 为 X 中的**开集**，或简称**开集.**

- **定理** 度量空间 X 的开集具备下列性质:

(1) Φ, X 为开集;
(2) 任何两个开集的交为开集;
(3) 任意多个开集的并为开集.

- **由度量空间** (X,d) **所诱导的拓扑** τ_d **是指**度量空间 (X,d) 中的所有**开集所成之集.**

- **拓扑空间的度量化**

设 (X,τ) 为拓扑空间. 若存在一个度量 d 使 d 诱导出的拓扑 τ_d 就是 τ, 即 $\tau_d=\tau$，则称 (X,τ) 可度量化. 拓扑空间的度量化问题是拓扑学的重要问题之一, 存在许多不可度量化的拓扑空间, 即拓扑空间是度量空间的推广.

三、拓扑空间中的重要子集

1. **邻域**

- 开邻域

若 $x\in O$，O 是开集，则称 O 为点 x 的一个开邻域

- 开邻域系

称点 x 的全体开邻域族 $\mathrm{N}_x^{0}=\{G\mid G是x的开邻域\}$ 为点 x 的一个开邻域系

- **邻域**

设 X 为拓扑空间, $x\in G\subset X$，若存在开集 O, 使得 $x\in O\subset G$, 则称 G 为点 x 的一个邻域.

- 邻域系

称点 x 的全体邻域族 $\mathrm{N}_x=\{G\mid G是x的邻域\}$ 为点 x 的一个邻域系.

2. **闭集**

- 若 $X-A$ 为开集，则称 A 为闭集.

3. **闭包**

- 称 $\{x\in X\mid\forall V\in\mathrm{N}_x, V\cap A\ne\phi\}$ 为 A 的闭包，记作 $\overline{A}$ 或 $c(A)$

- 由 $A\mapsto c(A)$ 确定的映射 $c:2^X\to 2^X$ 称为闭包算子

4. **导集**

- 称 $\{x\in X\mid\forall V\in\mathrm{N}_x, V\cap A-\{x\}\ne\phi\}$ 为 A 的导集，记作 A' 或 $d(A)$

- 由 $A \mapsto d(A)$ 确定的映射 $d: 2^X \to 2^X$ 称为导算子

5. **内部**

- 称 $\{x \in X \mid \exists V \in \mathrm{N}_x, V \subset A\}$ 为 A 的内部，记作 A° 或 $i(A)$

- 由 $A \mapsto i(A)$ 确定的映射 $i: 2^X \to 2^X$ 称为内部算子

6. **边界**

- 称 $c(A) \cap c(X - A)$ 为 A 的边界，记作 $\partial(A)$

- 由 $A \mapsto \partial(A)$ 确定的映射 $\partial: 2^X \to 2^X$ 称为边界算子

习 题

1. d, d': $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 定义为 $d(x,y) = (x-y)^2, d'(x,y) = |x^2 - y^2|$. 证明 d, d' 都不是 $\mathbf{R}$ 的度量.
2. 令 (X,d) 是离散的度量空间, 证明:
   (1) X 的每个子集都是开集.
   (2) 若 Y 也是度量空间，则任何映射 $f: X \to Y$ 都是连续的.
3. 设 (X,d) 为度量空间，且 X 为有限集. 证明 X 的任何子集都是开集.