第三节　　曲纹坐标

1．曲纹坐标系

定义 1　设 $(x^1,\cdots,x^n)$ 是 n 维欧氏空间 E^n 中的直角坐标系。设有开集 $U\subset E^n$，假定在 U 中点的直角坐标记为 $(u^1,\cdots,u^n)$。如果存在同胚映射 $f:U\to V\subset E^n$，表示为

$$x^i=f^i(u^1,\cdots,u^n),\quad 1\le i\le n,$$

其逆映射 $f^{-1}:V\to U$ 表示为

$$u^i=g^i(x^1,\cdots,x^n),\quad 1\le i\le n,$$

并且 $f^i(u^1,\cdots,u^n)$ 和 $g^i(x^1,\cdots,x^n)$ 都是光滑函数，则称 $(u^1,\cdots,u^n)$ 为 $V\subset E^n$ 上的曲纹坐标系。此时，区域 U 和 V 通过光滑同胚 f 等同起来，点 $P\in V$ 的曲纹坐标 $(u^1,\cdots,u^n)$ 就是其原象 $f^{-1}(P)$ 在区域 U 上的直角坐标。

2．隐函数定理

定理 1　假定

1) $m+n$ 个变元的 n 个函数 $F_1,\cdots,F_n$ 在以 $(x_0^1,\cdots,x_0^m,y_0^1,\cdots,y_0^n)$ 为中心的 $m+n$ 维长方体

$$D=\prod_{i=1}^{m}[x_0^i-\Delta_i,x_0^i+\Delta_i]\times\prod_{j=1}^{n}[y_0^j-\Delta'_j,y_0^j+\Delta'_j]$$

内有定义，并且连续；

2) 这些函数关于各个变元的偏导数在 D 内都存在且连续；

3) 点 $(x_0^1,\cdots,x_0^m,y_0^1,\cdots,y_0^n)$ 满足方程组

$$F_\alpha(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^n)=0,\quad 1\le\alpha\le n;$$

4）Jacobi 行列式 $\dfrac{\partial(F_1,\cdots,F_n)}{\partial(y^1,\cdots,y^n)}$ 在这一点不为 0；

那么

a） 在 点 $(x_0^1,\cdots,x_0^m,y_0^1,\cdots,y_0^n)$ 的 某 个 邻 域 内 方 程 组 确 定 $y^1,\cdots,y^n$ 为 $x^1,\cdots,x^m$ 的单值函数

$$y^\alpha = f^\alpha(x^1,\cdots,x^m),\quad 1\le\alpha\le n，$$

即上述函数组有恒等式

$$F_\alpha(x^1,\cdots,x^m,f^1(x^1,\cdots,x^m),\cdots,f^n(x^1,\cdots,x^m))\equiv 0；$$

b) 函数 $f^\alpha(x^1,\cdots,x^m),\quad 1\le\alpha\le n$，是连续的；

c) 函数 $f^\alpha(x^1,\cdots,x^m)$ 关于各个变元的偏导数都存在且连续。

定理 2 设 D 是 E^n 中的一个开区域，$f:D\to E^n$ 是光滑映射。若映射 f 在点 $P\in D$ 的秩为 n，则存在点 P 的邻域 $U\subset D$，以及点 $f(P)$ 的邻域 $V\subset E^n$，使得 $f|_U:U\to V$ 是光滑同胚。

3.例子

Ex1.平面 E^2 内的极坐标系。

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

Ex2. E^3 中的球坐标系。

$$\begin{cases} x = r\cos\psi\cos\theta \\ y = r\cos\psi\sin\theta \\ z = r\sin\psi \end{cases}$$

常用的还有柱面坐标，坐标变换为

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = t \end{cases}$$

4.自然标架

假定在E^n中取定单位正交标架$\{O;\delta_i\}$，相应的直角坐标系为$(x^1,\cdots,x^n)$。设开集$U(\subset E^n)$内的点直角坐标记为$(u^1,\cdots,u^n)$。如果$r:U\to V\subset E^n$是光滑同胚，即它在区域V上给出的曲纹坐标系$(u^1,\cdots,u^n)$，坐标变换为

$$x^i = f^i(u^1,\cdots,u^n),\quad 1\le i\le n,$$

则u^i－曲线的切向量是

$$r_i=\sum_{j=1}^n \frac{\partial f^j}{\partial u^i}\delta_j。$$

在任意一点$Q=r(P)\in V$处切向量$r_1,\cdots,r_n$是线性无关的，因而$\{Q;r_i\}$是E^n在点Q的一个标架，称为由曲纹坐标系$(u^1,\cdots,u^n)$所诱导的自然标架。

5．度量系数

$$g_{ij}=<r_i,r_j>=\sum_{k=1}^n \frac{\partial f^k}{\partial u^i}\frac{\partial f^k}{\partial u^j}$$

Christoffel 记号

$$\Gamma_{il}^k=\frac{1}{2}g^{kj}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}+\frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i}-\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j}\right)$$

作业：P.48　Ex13、Ex15