

第二章 几个重要的拓扑性质

第一节 分离公理与可数公理

T_0 空间：设 X 是拓扑空间，如果 X 中的任意两个不相同的点中必有一个点有一个开邻域不包含另一点，则称 X 是一个 T_0 空间。

EX1. 不是 T_0 空间的例子：包含多余两个点的平凡空间。

1.1 T_1 公理和 T_2 公理

T_1 公理：任意两个不同点 x 与 y ， x 有邻域不含 y ， y 有邻域不含 x 。

T_2 公理：任意两个不同点有不相交的邻域。

显然有 T_2 公理 $\Rightarrow T_1$ 公理 $\Rightarrow T_0$ 公理，但反之不成立。反例如下：

EX2. $X = \{a, b, c\}, \tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$ 则 X 满足 T_0 公理但不满足 T_1 公理。

EX3. (\mathbb{R}, τ_f) 满足 T_1 公理，但 x 与 y 的邻域一定相交，故它不满足 T_2 公理。

Pro1. X 满足 T_1 公理 $\Leftrightarrow X$ 的有限子集是闭集 $\Leftrightarrow X$ 的单点集是闭集。

满足 T_2 公理的空间称为 *Hausdorff* 空间。

Pro2. *Hausdorff* 空间中，一个序列不会收敛到两个以上的点。

1.2 T_3 公理和 T_4 公理

T_3 公理：任意一点与不含它的任一闭集有不相交的邻域。

Pro3. X 满足 T_0 公理，又满足 T_3 公理，则 X 满足 T_2 公理。

T_4 公理：任意两个不相交的闭集有不相交的邻域。

当 X 满足 T_1 公理时， T_4 公理 $\Rightarrow T_3$ 公理 $\Rightarrow T_2$ 公理。

当 X 不满足 T_1 公理时，上述关系不成立。

例如：取第一章第一节的习题三中的拓扑， (\mathbb{R}, τ) 满足 T_4 公理，但它不满足 T_3 公理、 T_2 公理、 T_1 公理。

Pro4. 度量空间满足 T_i 公理 ($i = 1, 2, 3, 4$)。

Pro5. (1) 满足 T_3 公理 \Leftrightarrow 任意点 x 和它的开邻域 W ，存在 x 的开邻域 U ，使得 $\bar{U} \subset W$ 。

(2) 满足 T_4 公理 \Leftrightarrow 任意闭集 A 和它的开邻域 W ，有 A 的开邻域 U ，使得 $\bar{U} \subset W$ 。

作业：P43 Ex2 Ex6