

3.3 拓扑基

想法：度量空间中的开集是若干个互不相交的球形邻域的并。度量拓扑由球形邻域生成；乘积拓扑由一个特定的子集族生成。**拓扑基**就是从上述方法中抽象出来的。

Def 1. 集合 X 的子集族 Γ 为集合 X 的**拓扑基**，如果 $\bar{\Gamma}$ 是 X 的一个拓扑；称拓扑空间 (X, τ) 的子集族 Γ 为这个**拓扑空间的拓扑基**，如果 $\bar{\Gamma} = \tau$ 。

Pro1. Γ 是集合 X 的拓扑基的充分必要条件是：

$$(1) \bigcup_{B \in \Gamma} B = X ;$$

(2) 若 $B_1, B_2 \in \Gamma$ ，则 $B_1 \cap B_2 \in \bar{\Gamma}$ (即 $\forall x \in B_1 \cap B_2$ ，存在 $B \in \Gamma$ ，使得 $x \in B \subset B_1 \cap B_2$)

Ex1. 规定 \mathbb{R} 的子集族 $\Gamma = \{[a, b) \mid a < b\}$ ，则 Γ 是 \mathbb{R} 的一个拓扑基。($\bar{\Gamma}$ 称实数下限拓扑)

注 1：规定 \mathbb{R} 的子集族 $\Gamma_1 = \{[a, b) \mid a < b, b \text{ 是有理数}\}$ ，则 Γ_1 也是 \mathbb{R} 的一个拓扑基。

注 2：规定 \mathbb{R} 的子集族 $\Gamma_2 = \{[a, b) \mid a < b, a, b \text{ 是有理数}\}$ ，则 Γ_2 也是 \mathbb{R} 的一个拓扑基。

注 3： $\bar{\Gamma} = \bar{\Gamma}_1$ ，但 $\bar{\Gamma} \neq \bar{\Gamma}_2$ 。

设 τ 是实数下限拓扑， τ_2 是由注 2 的拓扑基生成的拓扑。则 $[\sqrt{2}, 3) \in \tau$ 但是 $[\sqrt{2}, 3) \notin \tau_2$ 。

事实上，若 $[\sqrt{2}, 3) \in \tau_2$ 则 $[\sqrt{2}, 3) = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} [a_\alpha, b_\alpha)$ ，($a_\alpha, b_\alpha \in \mathbb{Q}$) 故存在一个 $\alpha_0 \in \Lambda, \sqrt{2} \in [a_{\alpha_0}, b_{\alpha_0})$ ，于是 $a_{\alpha_0} \leq \sqrt{2}$ 。若 $a_{\alpha_0} < \sqrt{2}$ ，则 $[\sqrt{2}, 3) \neq \bigcup_{\alpha \in \Lambda} [a_\alpha, b_\alpha)$ ，($a_\alpha, b_\alpha \in \mathbb{Q}$)，若 $a_{\alpha_0} = \sqrt{2}$ ，这与 a_{α_0} 是有理数矛盾。

Pro2. Γ 是拓扑空间 (X, τ) 的拓扑基的充分必要条件是：

$$(1) \Gamma \subset \tau ;$$

(2) $\tau \subset \bar{\Gamma}$ 。

Ex2. 若 Γ 是拓扑空间 (X, τ) 的拓扑基, $A \subset X$ 。规定 $\Gamma_A = \{A \cap B \mid B \in \Gamma\}$ 。则 Γ_A 是 (A, τ_A) 的拓扑基。

Ex3. 设 \mathbb{R} 的子集族 $\Gamma = \{(a, b) \mid a < b, a, b \text{ 为有理数}\}$, 则 Γ 是 E^1 的拓扑基。

补充知识：拓扑空间的子基 (可参考熊金城《点集拓扑讲义》)

Def 2. 设 (X, τ) 是一个拓扑空间, φ 是 τ 的一个子族。如果 φ 的所有非空有限子族的交构成的集族, 即

$$\Gamma = \{S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n \mid S_i \in \varphi, i = 1, 2, \cdots, n; n \in \mathbb{Z}^+\}$$

是拓扑空间 Γ 的一个基, 则称集族 φ 是拓扑 τ 的一个子基。或称集族 φ 是拓扑空间 X 的一个子基。

Ex4. 实数空间 \mathbb{R} 的一个子基: $\varphi = \{(a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, b) \mid b \in \mathbb{R}\}$ 。

作业：

1. 定义 $\rho_1, \rho_2: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, 使得对于

$$\forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, \text{ 有}$$

$$\rho_1(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}, \rho_2(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|。$$

证明:(1) ρ_1, ρ_2 都是 \mathbb{R}^2 上的度量。

(2) ρ_1, ρ_2 以及 \mathbb{R}^2 上的通常度量 ρ 诱导出的拓扑是相同的。

提示：利用 $\rho_1(x, y) \leq \rho(x, y) \leq \rho_2(x, y) \leq 2\rho_1(x, y)$ 。

2. 设 X 是度量空间, 证明: 如果 X 有一个基只含有有限个元素, 则 X 必为只含有有限多个点的离散空间。