

1.3 拓扑空间中的几个基本概念

闭集

Def. 1 拓扑空间 X 的子集 A 称为闭集，如果 A^c 是开集。

Pro. 1 拓扑空间的闭集有下列性质：

- (1) X 和 \emptyset 都是闭集；
- (2) 任意多个闭集的交集是闭集；
- (3) 有限多个闭集的并集是闭集。

邻域、内点和内部

Def. 2 设 A 是拓扑空间 X 的一个子集， $x \in A$ 。如果存在开集 U ，使得 $x \in U \subset A$ ，则称 x 是 A 的一个内点，也称 U 是 x 的一个邻域。 A 的所有内点所成之集称为 A 的内部，记为 A^0 。

Pro. 2 (1) 若 $A \subset B$ ，则 $A^0 \subset B^0$ ；

(2) A^0 是包含在 A 中的所有开集的并集，因此是包含在 A 中的最大开集；

(3) $A^0 \supset A \Leftrightarrow A^0 = A \Leftrightarrow A$ 是开集；

(4) $(A \cap B)^0 = A^0 \cap B^0$ ；

(5) $(A \cup B)^0 \supset A^0 \cup B^0$ 。

聚点与闭包

Def. 3 设 A 是拓扑空间 X 的一个子集， $x \in A$ 。如果 x 的每个邻域都含有 $A \setminus \{x\}$ 中的点，则称 x 为 A 的聚点。 A 的所有聚点的所成之集称为 A 的导集，记作 A' 。称集合 $A \cup A'$ 为 A 的闭包，记作 \bar{A} 。

Pro. 3 若拓扑空间 X 的子集 A 与 B 互为余集，则 \bar{A} 与 B^0 互为余集。

Pro. 4 (1) 若 $A \subset B$ ，则 $\bar{A} \subset \bar{B}$ ；

(2) \bar{A} 是所有包含 A 的闭集的交集，因此是包含 A 的最小闭集；

(3) $\bar{A} = A \Leftrightarrow A$ 是闭集；

(4) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ ；

$$(5) \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}.$$

如果 $\overline{A} = X$ ，则称拓扑空间 X 的子集 A 在 X 中是**稠密的**。如果拓扑空间 X 有一个（至多）可数的稠密子集，则称 X 是**可分的拓扑空间**。

1.4 子空间

Pro. 5 设 A 是拓扑空间 (X, τ) 的一个非空子集，则 A 的子集族

$$\tau_A = \{U \cap A \mid U \in \tau\}$$

是 A 上的一个拓扑，

Def. 4 称 A 的子集族 $\tau_A = \{U \cap A \mid U \in \tau\}$ 为由 τ 导出的**子空间拓扑**，

称 (X, τ_A) 为 (X, τ) 的**子空间**。

Pro. 6 设 X 是拓扑空间， $B \subset A \subset X$ ，则 C 是子空间 A 的闭集 $\Leftrightarrow C$ 是 A 与 X 的某一个闭集的交集。

Pro. 7 设 X 是拓扑空间， $B \subset A \subset X$ ，则

- (1) 若 B 是 X 的开（闭）集，则 B 也是 A 的开（闭）集；
- (2) 若 A 是 X 的开（闭）集， B 是 A 的开（闭）集，则 B 也是 X 的开（闭）集。

例

设 $X = \{a, b, c, d\}$ ，在 X 上定义拓扑 $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}\}$ 。

(1) 写出 (X, τ) 的所有开集与闭集；

(2) 设 $A = \{a, c\}$ ，求 \overline{A}, A^0 。

答案

(1) 开集 $\emptyset, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}$ ；

闭集 $\emptyset, X, \{b, c, d\}, \{a, b\}, \{b\}$ 。

(2) $\overline{A} = \{a, b, c, d\}$ ， $A^0 = \{a\}$ 。

作业 P.20 ex.6、ex.10.