

## Original Articles

## 随机逼近的几何结构

程代展, 杜宏, 陈翰馥

中科院系统所, 北京(100080)

收稿日期 修回日期 网络版发布日期 接受日期

**摘要** 设 $J$ 是函数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 的梯度 $f_x$ 的零集. 在相当一般的条件下, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, 随机逼近算法使得 $d(f(x_k), f(J)) \rightarrow 0$ . 首先, 讨论了 $k \rightarrow \infty$ 时,  $d(f(x_k), f(J)) \rightarrow 0$ 蕴涵 $k \rightarrow \infty$ 时,  $d(x_k, J) \rightarrow 0$ 的收敛条件. 证明了如果 $f_x$ 是连续的且 $f(J)$ 是无处稠密的, 那么蕴涵存在. 然后, 证明了Sard定理的增强型式, 作为特殊情况, 证明了两个独立充分条件回答了先前的问题: 如果 $f$ 是 $C^1$ 函数且 i)  $J$ 是紧集, ii) 对于任意有界集 $B$ ,  $f^{-1}(B)$ 是有界的, 那么 $f(J)$ 是无处稠密的. 最后, 用代数几何的一些工具, 证明了, 如果 $f$ 是多项式那么 $f(J)$ 是有限集. 因此,  $f(J)$ 在多项式情形是无处稠密的.

**关键词** [Sard定理](#) [不可约代数簇](#)

**分类号**

## Geometric structure in stochastic approximation

Dai Zhan CHENG, Hong DU, Han Fu CHEN

Institute of Systems Science, the Academy of Mathematics and Systems Sciences, the Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China

**Abstract** Let  $J$  be the zero set of the gradient  $f_x$  of a function  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Under fairly general conditions the stochastic approximation algorithm ensures  $d(f(x_k), f(J)) \rightarrow 0$ , as  $k \rightarrow \infty$ . First of all, the paper considers this problem: Under what conditions the convergence  $d(f(x_k), f(J)) \rightarrow 0$  implies  $d(x_k, J) \rightarrow 0$ . It is shown that such implication takes place if  $f_x$  is continuous and  $f(J)$  is nowhere dense. Secondly, an intensified version of Sard's theorem has been proved, which itself is interesting. As a particular case, it provides two independent sufficient conditions as answers to the previous question: If  $f$  is a  $C^1$  function and either i)  $J$  is a compact set or ii) for any bounded set  $B$ ,  $f^{-1}(B)$  is bounded, then  $f(J)$  is nowhere dense. Finally, some tools in algebraic geometry are used to prove that  $f(J)$  is a finite set if  $f$  is a polynomial. Hence  $f(J)$  is nowhere dense in the polynomial case.

**Key words** [Stochastic approximation](#) [regular value](#) [intensified Sard's theorem](#) [irreducible algebraic variety](#)

DOI:

通讯作者 程代展

## 扩展功能

## 本文信息

▶ [Supporting info](#)

▶ [PDF\(0KB\)](#)

▶ [HTML全文\(0KB\)](#)

▶ [参考文献](#)

## 服务与反馈

▶ [把本文推荐给朋友](#)

▶ [加入我的书架](#)

▶ [加入引用管理器](#)

▶ [复制索引](#)

▶ [Email Alert](#)

▶ [文章反馈](#)

▶ [浏览反馈信息](#)

## 相关信息

▶ [本刊中包含“Sard定理”的相关文章](#)

▶ [本文作者相关文章](#)

· [程代展](#)

· [杜宏](#)

· [陈翰馥](#)