第一章　数项级数

§1. 1　数项级数及其与序列极限和无穷积分的关系

设$\{a_n\}$是一个给定的序列，我们称形式和$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = a_1 + a_2 + \cdots$为序列$\{a_n\}$的数项级数或无穷级数．我们希望将加法从有限个数的和推广到无穷，即希望求序列$\{a_n\}$的和．

令$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$，　s_n称为级数$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$的部分和．

如果序列$\{s_n\}$是收敛的，则称$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$收敛，定义其和为$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \lim_{n\to+\infty} s_n$；

如果序列$\lim_{n\to+\infty} s_n = \pm\infty$，则称$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$发散到$\pm\infty$，记为$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \pm\infty$；

如果序列$\lim_{n\to+\infty} s_n$不存在，则称$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$发散，其和无意义．

例　等比级数$\sum_{k=0}^{+\infty} cq^k$，其部分和$s_n = \sum_{k=0}^{n} cq^k = c\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$．当$|q|<1$时$\lim_{n\to+\infty} s_n = \frac{c}{1-q}$，级数$\sum_{k=0}^{+\infty} cq^k$收敛，$\sum_{k=0}^{+\infty} cq^k = \frac{c}{1-q}$．

当$|q|\ge 1$时，$\sum_{k=0}^{+\infty} cq^k = +\infty$．当$q=-1, c\neq 0$时，$\sum_{k=0}^{+\infty} cq^k = c-c+c-c+\cdots$其发散．

当$q<-1$时，$\sum_{k=0}^{+\infty} cq^k = \lim_{n\to+\infty} s_n = \infty$．

例　通常一个实数$r\in\mathbf{R}$可表示为无穷小数$r = a_0.a_1a_2\cdots$，其中$a_0\in\mathbf{Z}, 0\le a_i\le 9$．利用级数可将$r$表示为$r = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a_k}{10^k}$．

例 3. 11：证明$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(k+1)}$收敛，并求其和．

证明：级数的部分和 $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)}=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)=1-\dfrac{1}{n+1}$，**因此**

$\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{k(k+1)}=\lim\limits_{n\to+\infty}s_n=1$.

例 3. 1. 2：任给 $x\in\mathbf{R}$，**证明级数** $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{x^k}{k!}$ **收敛，并求其和.**

证明：利用函数 $f(x)=e^x$ **的** Taylor **公式，对于任意** n，**存在** $q_n, 0<q_n<1$，**使得**

$0<e^x-\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{x^k}{k!}=\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{qx}<\dfrac{x^n}{(n+1)!}e^{|x|}$，**因而** $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{x^k}{k!}=e^x$.

我们将级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}a_k$ **的收敛和求和问题化为由其部分和构成的序列** $\{s_n\}$ **的收敛和求极限问题. 利用序列极限的性质容易得到**

定理 3. 1. 1：如果 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}a_k,\sum\limits_{k=1}^{+\infty}b_k$ **收敛，则** $\forall c\in\mathbf{R}$，$\sum\limits_{k=1}^{+\infty}ca_k$ **和** $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(a_k+b_k)$ **收敛并且**

$$\sum_{k=1}^{+\infty}ca_k=c\sum_{k=1}^{+\infty}a_k,\quad \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{+\infty}a_k+\sum_{k=1}^{+\infty}b_k .$$

定理 3. 1. 2：如果 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ **收敛，则** $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$.

证明：由 $a_n=s_n-s_{n-1}$，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ **收敛等价于** $\{s_n\}$ **收敛. 因此**

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}(s_n-s_{n-1})=\lim_{n\to+\infty}s_n-\lim_{n\to+\infty}s_{n-1}=0 .$$

设 $\{s_n\}$ **是一给定的序列，定义** $a_1=s_1, a_k=s_k-s_{k-1}, k=2,3,\cdots$. **则** $\{s_n\}$ **是级数** $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}a_k$ **的部分和构成的序列. 因此** $\{s_n\}$ **的收敛和求极限问题就是级数** $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}a_k$ **的收敛和求和问题. 所以序列和级数是表示极限理论的两个等价的工具. 但另一方面级数作为加法的推广，又有其自身独特的问题、特点和研究方法. 例如我们可以将级数看作一个无穷积分.**

定理 3. 1. 3：设$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$是给定的级数，定义$[0,+\infty)$上的函数$f(x)$为$f(x)=a_k$．如果$x\in[k,k+1)$，则$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$收敛的充分必要条件是$\int_1^{+\infty} f(x)dx$收敛．如果$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$收敛，则$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k=\int_1^{+\infty} f(x)dx$．

证明：如果$\int_1^{+\infty} f(x)dx$收敛，则由$\sum_{k=1}^{n} a_k=s_n=\int_1^{n+1} f(x)dx$得

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k=\lim_{n\to+\infty} s_n=\lim_{n\to+\infty}\int_1^{n+1} f(x)dx=\lim_{n\to+\infty}\int_1^{+\infty} f(x)dx.$$

反之，设$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$收敛，则对$\forall T\in(1,+\infty)$，有

$$\int_1^T f(x)dx=\int_1^{[T]} f(x)dx+\int_{[T]}^T f(x)dx=s_{[T]-1}+(T-[T])a_{[T]}.$$

由$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$收敛知$\lim_{k\to+\infty} a_k=0$．因此

$$\lim_{T\to+\infty}\int_1^T f(x)dx=\lim_{T\to+\infty} s_{[T]-1}+\lim_{T\to+\infty}(T-[T])a_{[T]}=\lim_{T\to+\infty} s_{[T]-1}=\sum_{k=1}^{+\infty} a_k.$$

由这一定理，级数可以表示为无穷积分．因此我们可以利用上一章中给出的关于无穷积分的许多方法和结果来研究级数．

§3. 2 无穷级数的 Cauchy 准则和绝对收敛性

设$\{s_n\}$是级数$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$的部分和，利用序列极限的 Cauchy 准则，我们不难得到级数收敛的 Cauchy 准则．

定理 3. 2. 1（Cauchy 准则）：级数$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$收敛的充分必要条件是$\forall e>0,\exists N$，只要$n>N, k=0,1,2\cdots$，就有$|s_{n+k}-s_n|=|a_{n+1}+\cdots+a_{n+k}|<e$．

证明：（思考题）．

在 Cauchy 准则中令$k\to+\infty$，则得

定理 3. 2. 2：如果$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ **收敛，则对**$\forall e>0, \exists N$，**只要**$n>N$，**就有**$\left|\sum_{k=n}^{+\infty} a_k\right|<e$.

如果在 Cauchy **准则中令**$k=1$，**则有**

定理 3. 2. 3：如果$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ **收敛，则** $\lim_{k\to+\infty} a_k=0$.

例 3. 2. 1：级数$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}$**称为调和级数．求证**$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}=+\infty$.

证明：对于任意n，$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$．**令**$e_0=\frac{1}{2}$，**则对任意**$n$，**有**$\left|\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\right|>e_0$．$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}$**不满足** Cauchy **准则，因而**$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}$ **发散．由**$\frac{1}{k}>0$ **得**$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}=+\infty$.

例 3. 2. 2：$\forall x\in\mathbf{R}$，**证明**$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin kx}{2^k}$ **收敛．**

证明：由$\left|\frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{\sin(n+k)x}{2^{n+k}}\right|\le\frac{1}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+k}}=\frac{1}{2^{n+1}}\frac{1-\frac{1}{2^{k+1}}}{1-\frac{1}{2}}<\frac{1}{2^n}$．**因此**$\forall e>0$，**取**$N$ **使**$\frac{1}{2^N}<e$，**则**$n>N, k=0,1,2\cdots$**时恒有**

$$\left|\frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{\sin(n+k)x}{2^{n+k}}\right|<e.$$

$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin kx}{2^k}$**满足** Cauchy **准则，因而收敛．**

定理 3. 2. 4：如果$\sum_{k=1}^{+\infty}|a_k|$**收敛，则**$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ **收敛．**

证明：因$\sum_{k=1}^{+\infty}|a_k|$**收敛，则满足** Cauchy **准则，即**$\forall e>0, \exists N$，**只要**$n>N, k=0,1,2\cdots$，**就有**$|a_{n+1}|+\cdots+|a_{n+k}|<e$．**但**

$$\left|a_{n+1}+\cdots+a_{n+k}\right| \leq\left|a_{n+1}\right|+\cdots+\left|a_{n+k}\right|,$$

因而 $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ 满足 Cauchy 准则，得 $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ 收敛.

类似于无穷积分，我们有下面定义.

定义 3. 2. 5：如果 $\sum_{k=1}^{+\infty}\left|a_k\right|$ 收敛，则称 $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ 绝对收敛；如果 $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ 收敛，而 $\sum_{k=1}^{+\infty}\left|a_k\right|=+\infty$，则称 $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ 条件收敛.

在无穷积分中我们知道 $\int_p^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 是条件收敛的. 现令 $a_k=\int_{kp}^{(k+1)p} \frac{\sin x}{x} dx$，则 $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k=\int_p^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 收敛. 但

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left|a_k\right|=\sum_{k=1}^{+\infty}\left|\int_{kp}^{(k+1)p} \frac{\sin x}{x} dx\right|=\sum_{k=1}^{+\infty} \int_{kp}^{(k+1)p}\left|\frac{\sin x}{x}\right| dx=\int_p^{(+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right| dx=+\infty,$$

因而 $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ 不是绝对收敛的.

§ 3. 3　正项级数

如果对于 $k=1,2,3\cdots$，恒有 $a_k>0$，则级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ 称为正项级数；如果 $a_k \geq 0$，则称 $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ 为非负项级数. 例如 $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ 是任意项级数，则 $\sum_{k=1}^{+\infty}\left|a_k\right|$ 是正项级数.

如果 $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ 是非负项级数，则其部分和 $s_n=\sum_{k=0}^{n} a_k$ 是单调上升序列，因而仅有两种可能. 或者 $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ 收敛，即 $\{s_n\}$ 有界；或者 $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k=+\infty$. 因此对正项级数，我们通常用一些已知其收敛和发散性的级数作为标准级数，用以和一般级数进行比较，建立收敛的各种判别法.

比较判别法：设 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 都是正项级数，如果存在常数 c 使 n 充分大后，有

$a_n \le cb_n$，则

（1） 如果$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$收敛；

（2） 如果$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$发散，则$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$发散.

证明：不妨设对所有n，都成立$a_n \le cb_n$. 因此，对任意n，$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \le c\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$. 如果$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$收敛，则$\left\{\sum_{k=1}^{n} b_k\right\}$有界，因而$\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k\right\}$有界，得$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$收敛.

利用比较判别法不难得到

定理 3. 3. 1：设$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$和$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$都是正项级数，设$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=l$，则

1. $0<l<+\infty$时，$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$和$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$同时收敛或发散；

2. 如果$l=0$，并且$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$收敛；

3. 如果$l=+\infty$，并且$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$发散，则$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$发散.

如果我们将收敛级数$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$的通项a_n构成的序列$\{a_n\}$看作无穷小序列，则上面定理可表示为同阶无穷小构成的正项级数同时收敛或者同时发散；如果低阶无穷小构成的正项级数收敛，则高阶无穷小构成的正项级数也收敛；如果高阶无穷小构成的正项级数发散，则低阶无穷小构成的正项级数也发散.

例 3. 3. 1：证明$\forall x\in \mathbf{R}$，$\sum_{k=1}^{+\infty} 2^k \sin\frac{x}{3^k}$绝对收敛.

证明：由$\lim_{k\to+\infty}\frac{\left|2^k \sin\frac{x}{3^k}\right|}{\left(\frac{2}{3}\right)^k}=|x|$，因此$\left\{\left|2^k \sin\frac{x}{3^k}\right|\right\}$是$\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^k\right\}$的同阶无穷小（$x\ne 0$）

或高阶无穷小（$x=0$）．而$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k$收敛，因此$\sum_{k=1}^{+\infty}2^k\sin\frac{x}{3^k}$绝对收敛.

例 3. 3. 2：证明级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$在$p\le 1$时发散，$p>1$时收敛.

证明：$p\le 1$时，$\frac{1}{n^p}\ge\frac{1}{n}$．但已知调和级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}=+\infty$，因此$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}=+\infty$．

当 $p>1$ 时，在 $[1,+\infty)$ 上定义函数 $g(x)=\frac{1}{n^p}$ 如果 $x\in[n,n+1)$．定义函数 $f(x)$ 为 $f(x)=1$ 如果 $x\in(1,2)$，$f(x)=\frac{1}{(x-1)^p}$ 如果 $x\in[2,+\infty)$，则在 $[1,+\infty)$ 上 $0<g(x)\le f(x)$．但由广义积分知 $p>1$ 时 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，利用广义积分的比较判别法得 $\int_1^{+\infty}g(x)dx$ 收敛，但$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}=\int_1^{+\infty}g(x)dx$，因而$p>1$时$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$收敛.

例 3. 3. 3：讨论级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$的收敛性.

解：令 $f(x)=x-\ln(1+x)$，则 $f(0)=0$，$f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}$．因此$x>0$时 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增．特别地，当 $x>0$ 时有 $f(x)>f(0)=0$．令 $x=\frac{1}{n}$，得 $\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>0$，$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$是正项级数.

利用洛必达法则，当$x\to 0$时将$f(x)$和x^2进行比较，得$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{x}{1+x}}{2x}=\frac{1}{2}$，即$x\to 0$时$f(x)$与$x^2$是同阶无穷小．特别地，令$x=\frac{1}{n}$，得$\left\{\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}$与$\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$是同阶无穷小．但已知$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，因此$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$收敛.

令$c=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$，$s_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)$为部分和，则

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n+1),$$

得 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln(n+1)+c+a_n$，其中 $a_n\to 0$ 是无穷小. 如果用 $\ln n$ 代替 $\ln(n+1)$，上式可表示为 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+c+a_n$，即 $n\to+\infty$ 时调和级数 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ 与 $\ln n$ 是等价无穷小. 上式中 c 称为欧拉（Euler）常数. 利用其它方法可得

$$c=0.57721566490\cdots.$$

为了与某些给定的标准级数进行比较，我们通常将比较判别法表示为

比较判别法：设 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$，$\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ 是正项级数，如果 n 充分大时恒有 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{b_{n+1}}{b_n}$，则当 $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛；$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散时，$\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ 发散.

证明：由于改变一个级数的有限项不影响其收敛和发散性，因此不妨设对于 $n=1,2,3\cdots$ 恒有 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{b_{n+1}}{b_n}$. 特别地，$\frac{a_n}{a_1}=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_2}{a_1}\le\frac{b_n}{b_{n-1}}\cdot\frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{b_2}{b_1}=\frac{b_n}{b_1}$.

因此 $a_n\le\frac{a_1}{b_1}b_n$. 我们的定理就是前面的比较判别法.

利用等比级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}cq^n$ 作为标准级数，用以判别其它级数的收敛和发散性，我们可以建立下面的达朗倍尔（D’Alembert）判别法.

达朗倍尔判别法：设 $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ 是正项级数，如果 $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=r<1$，则 $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ 收敛；如果 $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=r>1$，则 $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ 发散.

证明：设 $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=r<1$，取 $e>0$ 使 $r+e<1$，则由极限定义知，$\exists N$，当 $n>N$ 时，有 $\frac{a_{n+1}}{a_n}<r+e=\frac{(r+e)^{n+1}}{(r+e)^n}$，但 $r+e<1$，因而 $\sum_{n=0}^{+\infty}(r+e)^n$ 收敛，得 $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ 收敛.

设 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=r>1$，取 $e>0$ 使 $r-e>1$，则 $\exists N$，当 $n>N$ 时，有 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>r-e=\dfrac{(r-e)^{n+1}}{(r-e)^n}$，但 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(r-e)^n$ 发散，由比较判别法 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n$ 发散.

例 3. 3. 4：讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n}$ 的收敛性.

解：$\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\dfrac{|x|^{n+1}}{n+1}\Big/\dfrac{|x|^n}{n}=\dfrac{n}{n+1}|x|$，因此 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=|x|$. 由达朗倍尔判别法得，$|x|<1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n}$ 收敛；$|x|>1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{|x|^n}{n}$ 发散. 容易看出 $|x|>1$ 时 $\dfrac{x^n}{n}\to\infty$，因此 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n}$ 显然发散. 当 $|x|=1$ 时，达郎倍尔判别法不能判别其是否收敛.

例 3. 3. 5：讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n!\left(\dfrac{x}{n}\right)^n$ 的收敛性.

解：$x=0$ 时显然收敛. 设 $x\neq 0$，则

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=(n+1)!\left(\frac{|x|}{n+1}\right)^{n+1}\Big/ n!\left(\frac{|x|}{n}\right)^n=|x|\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=|x|\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n$$
$$=|x|\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\Big/\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)}.$$

因此 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\dfrac{|x|}{e}$，得 $|x|<e$ 时级数绝对收敛，而 $|x|>e$ 时由 $|a_{n+1}|>|a_n|$，得 $|a_n|$ 单调上升，因而不趋于零，级数发散. 当 $|x|=e$ 时，$\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$，达郎倍尔判别法不能判别其是否收敛.

同样以等比级数 $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}cq^k$ 为标准级数，我们有下面的哥西判别法.

哥西判别法：设 $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}a_k$ 是正项级数，如果 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{a_n}=r<1$，则 $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}a_k$ 收敛；如果

$\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{a_n}=r>1$，则$\sum\limits_{k=0}^{+\infty}a_k$ 发散.

证明：设$\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{a_n}=r<1$，取$e>0$使$r+e<1$，由上极限定义知，$\exists N$，使$n>N$ 时 $\sqrt[n]{a_n}<r+e$，因此$a_n<(r+e)^n$．但$\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(r+e)^k$ 收敛，由比较判别法，得$\sum\limits_{k=0}^{+\infty}a_k$ 收敛.

如果$\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{a_n}=r>1$，则存在$a_n$的子列$a_{n_k}$，使$a_{n_k}\geq 1$．显然$a_n$不趋于零，级数发散.

思考题：达郎倍尔判别法能否用哥西判别法的形式，用上极限给出？应该怎样表述？

例 3. 3. 6：设$a>0,b>0$为常数，定义级数

$$1+a+ab+ab^2+a^2b^2+\cdots+a^nb^{n-1}+a^nb^n+\cdots.$$

试问a,b在什么样条件下级数收敛.

解：令

$$x_n=\begin{cases}a^{\frac{n-1}{2}}b^{\frac{n-1}{2}}, & n\text{为奇数},\\ a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n-1}{2}}, & n\text{为偶数}.\end{cases}$$

则级数为$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x_n$．而

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\begin{cases}a, & n\text{为奇数},\\ b, & n\text{为偶数}.\end{cases}$$

因此$\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\max\{a,b\}$，得$a<1,b<1$时级数收敛．而$\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\min\{a,b\}$，得$a>1,b>1$时级数发散．（由级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x_n$ 的定义，这点显然．）

如果用哥西判别法，则有$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{x_n}=\sqrt{ab}$．因此$ab<1$时级数收敛，$ab>1$时级数发散，$ab=1$时$x_n$不趋于零，级数显然也发散.

在上例中哥西判别法给出的收敛范围包含了达郎倍尔判别法的结果，这一点并非偶然. 事实上我们有下面命题

命题 3. 3. 2：设$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$为正项级数，如果$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=r$，则$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=r$．但反之不成立.

证明：任给$e>0$，$\exists N$，**使**$n>N$ **后，**$\frac{a_{n+1}}{a_n}<r+e$．**不妨设对** $n=1,2,\cdots$，$\frac{a_{n+1}}{a_n}<r+e$ **都成立. 得**$\frac{a_n}{a_1}=\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}<(r+e)^{n-1}$，**因此**

$$a_n<a_1(r+e)^{n-1},\sqrt[n]{a_n}<\sqrt[n]{a_1}(r+e)^{\frac{n-1}{n}}\to r+e,$$

即$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{a_n}<r+e$．**但**$e$**是任意的，得**$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{a_n}\le r$．**同理可证**$\underline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{a_n}\ge r-e$．**因此得**$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=r$．

如果令 $a_n=\frac{2+(-1)^n}{2^n}$，**则** $\frac{1}{2}\le\sqrt[n]{a_n}\le\frac{\sqrt[n]{2}}{2}$．**因此** $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{2}$．**但** $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2+(-1)^{n+1}}{2(2+(-1)^n)}$．**因而**$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3}{2}$，$\underline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{6}$．**达郎倍尔判别法不能判别**$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$**的收敛性，而哥西判别法可以.**

对于级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$，**不论达郎倍尔判别法还是哥西判别法，都不能判别其是否收敛，原因是达郎倍尔判别法和哥西判别法中用的标准级数都是等比级数**$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$．**而当**$p>0$**时，对于任意**$q\in(0,1)$，$\left\{\frac{1}{n^p}\right\}$**都是比**$\left\{q^n\right\}$**高阶的无穷小（思考题）．因此**$p>1$**时，**$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$**是比**$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$**收敛得“更慢”的级数. 自然不能用**$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$**建立的判别法来判别**$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$**的收敛性.**
另一方面，如果以$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$**作为标准级数，则有可能得到更强的比较判别法.**

拉阿伯（Raabe）判别法 设$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$**为正项级数，如果**$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=m>1$，**则**$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

收敛；如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=m<1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散.

证明：先证一个不等式：设 $r>p>1$，则存在 $e>0$，使 $0<x<e$ 时，$1+rx>(1+x)^p$.

事实上令 $f(x)=(1+rx)-(1+x)^p$，则 $f(0)=0$．但 $f'(0)=r-p>0$，而 $f'(x)$ 是连续的，因而存在 $e>0$，使 $f'(x)$ 在 $(-e,e)$ 上大于零，$f(x)$ 单调上升．特别地，当 $0<x<e$ 时 $f(x)>f(0)=0$.

在上面不等式中如果令 $x=\dfrac{1}{n}$，则 n 充分大后有 $1+\dfrac{r}{n}>\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^p$.

现设 $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=m>1$，取 r,p 使得 $m>r>p>1$，则 $\exists N$，使 $n>N$ 后，$n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>r$，即 $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}>1+\dfrac{r}{n}$.

对 r 和 p，存在 N_1，使 $n>N_1$ 后，$1+\dfrac{r}{n}>\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^p$．因而 $n>\max\{N,N_1\}$ 后，

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^p=\frac{\dfrac{1}{n^p}}{\dfrac{1}{(n+1)^p}}.$$

而由 $p>1$ 知 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 收敛，因而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛.

如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=m<1$，则 n 充分大后有 $n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)<1$，即 $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\le 1+\dfrac{1}{n}=\dfrac{\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n+1}}$.

而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，得 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散.

例 3. 3. 7：判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\dfrac{1}{2n+1}$ 是否收敛.

解：$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)}\to 1$，因而不能用达郎倍尔判别法．而 $n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\dfrac{n(6n+5)}{(2n+1)^2}\to\dfrac{3}{2}>1$，由拉阿伯判别法得级数收敛.

考察级数$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\ln n}$，由于$n\to+\infty$时$\left\{\frac{1}{n\ln n}\right\}$是比$\left\{\frac{1}{n}\right\}$高阶的无穷小，而对于任意$e>0$，$\left\{\frac{1}{n\ln n}\right\}$是比$\left\{\frac{1}{n^{1+e}}\right\}$低阶的无穷小，因而拉阿伯判别法也不能判别$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\ln n}$的收敛性．对于这类级数，我们可以用下面的哥西积分判别法．

哥西积分判别法：设$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$是正项级数，如果存在连续函数$f(x)$，满足$f(x)$单调下降，并且$f(n)=a_n$，则$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$收敛的充分必要条件是$\int_1^{+\infty}f(x)dx$收敛．

证明：由$f(x)$单调下降，因而$k\le x\le k+1$时，$a_k=f(k)\ge f(x)\ge f(k+1)=a_{k+1}$，得$\sum_{k=1}^{n}a_k\ge\int_1^n f(x)dx\ge\sum_{k=1}^{n}a_{k+1}$，即$\sum_{n=1}^{n}a_n$与$\int_1^n f(x)dx$同为有界或同为无界，得$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$与$\int_1^{+\infty}f(x)dx$同时收敛或同时发散．

例 3. 3. 8：证明级数$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\ln^p n}$在$p>1$时收敛，$p\le 1$时发散．

证明：令$f(x)=\frac{1}{x\ln^p x}$，由哥西积分判别法，仅需讨论$\int_2^{+\infty}f(x)dx$的收敛性．但当$p\ne 1$时$\int_2^R f(x)dx=\frac{1}{-p+1}\frac{1}{\ln^{p-1}x}\Big|_2^R$，因而$p>1$时收敛，$p\le 1$时发散．

如果$p=1$，则$\int_2^R\frac{dx}{x\ln x}=\ln\ln x\Big|_2^R\to+\infty$，因而发散．

§3. 4　条件收敛的级数

如果级数$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$中有无穷多项是正的，同时也有无穷多项是负的，则其不能用正项级数的办法进行讨论．如果$\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|$收敛，则$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$绝对收敛．因而我们仅需考虑$\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|=+\infty$，而$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$收敛的情况，即我们只需讨论条件收敛的级数．与无穷积分讨论条件收敛时考虑形

式为 $\int_0^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 的积分相同，这里我们考虑形式为 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$ 的级数，我们希望将其化为无穷积分来讨论.

定 义 3. 4. 1 $[0,+\infty)$ 上 的 函 数 $f(x), g(x)$ 为 $f(x)=b_n$， 如果 $x\in[n,n+1)$ ，$g(x)=a_n$， 如果 $x\in[n,n+1)$. 则 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$ 收敛的充分必要条件是 $\int_0^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛.

因而利用无穷积分的 Dirichlet 判别法和 Abel 判别法，我们得到级数的 Dirichlet 判别法和 Abel 判别法.

Dirichlet 判别法：如果 $\left\{\sum_{n=0}^{N} b_n\right\}_{N=1,2,\cdots}$ 有界，而 $\{a_n\}$ 单调趋于零，则 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$ 收敛.

证明：不难看出 $\left\{\sum_{n=0}^{N} b_n\right\}_{N=1,2,\cdots}$ 有界等价于 $\left\{\int_0^R f(x)dx \middle| R\in(0,+\infty)\right\}$ 有界，而 $\{a_n\}$ 单调趋于零即 $x\to+\infty$ 时 $g(x)$ 单调趋于零. 由无穷积分的 Dirichlet 判别法，得 $\int_0^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛，因而 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$ 收敛.

Abel 判别法：如果 $\{a_n\}$ 单调有界，而 $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$ 收敛.

证明与上面的 Dirichlet 判别法相同.

注：在下一章中，我们将用 Abel 变换 Abel 不等式直接给出这两个判别法新的更简单的证明.

例 3. 4. 1：讨论 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ 的收敛性.

解：令 $a_n=\frac{1}{n}, b_n=(-1)^n$，则 $\{a_n\}$ 单调下降并趋于零，而 $\left|\sum_{n=0}^{N} b_n\right|\le 1$. 由 Dirichlet 判别法得 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ 收敛. 显然其仅是条件收敛.

利用 Dirichlet 判别法，我们可得到下面常用的形式更简单的莱布尼兹（Leibniz）判别法.

Leibniz 判别法：如果 $\{a_n\}$ 单调趋于零，则 $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ 收敛，并且有余项估计

$$\left|\sum_{n=N}^{+\infty}(-1)^n a_n\right| \le |a_N| .$$

证明：收敛性与上例相同，可直接用 Dirichlet **判别法得到．这里我们仅考虑其余项估计．不妨设**$\{a_n\}$**单调下降，因而**$a_n - a_{n+1} \ge 0$**，得**

$$\begin{aligned} 0 \le \left|\sum_{n=N}^{+\infty} a_n\right| &= (a_N - a_{N+1}) + (a_{N+2} - a_{N+3}) + \cdots \\ &= a_N - \left[(a_{N+1} - a_{N+2}) + (a_{N+3} - a_{N+4}) + \cdots\right] \\ &\le a_N . \end{aligned}$$

$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ **是正负交替出现的，因而又称为交错级数．由于其有较好的余项估计，常被用在近似计算中．**

在无穷积分中我们知道$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$**是条件收敛的，利用同样的方法，我们有下面条件收敛的典型例题．**

例 3. 4. 2**：证明**$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{n}$**收敛但不绝对收敛．**

证明：（思考题）．

§3. 5　绝对收敛的级数

级数$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ **是有限和** $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ **的推广，一个自然的问题是有限和的基本性质，如结合律、交换律和分配律等对无穷和**$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ **是否仍然成立．**

结合律对级数$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ **是成立的．**

设$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ **是收敛级数，则在不改变顺序的前提下将**a_n **分为若干组：**

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_{k_1}) + (a_{k_1+1} + a_{k_1+2} + \cdots + a_{k_2}) + \cdots + (a_{k_{n-1}+1} + a_{k_{n-1}+2} + \cdots + a_{k_n}) + \cdots$$
$$\stackrel{\Delta}{=} b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots ,$$

则$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ **收敛，并且**$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$．**事实上，**$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ **的部分和构成的序列是**$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ **部分和所成序列的子序列，因而有相同的极限．**

结合律的逆不成立.

$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots=0$，但$1-1+1-1+\cdots+1-1+\cdots$不收敛.

交换律：序列$\{a_k'\}$称为序列$\{a_k\}$的一个重排，如果$\{a_k'\}$中每一项都是$\{a_k\}$的项，而$\{a_k\}$中每一项在$\{a_k'\}$中出现且仅出现一次. 称级数$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$满足交换律，如果对$\{a_k\}$的任意重排$\{a_k'\}$，总有$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k=\sum_{k=1}^{+\infty} a_k'$.

定理 3. 5. 1：正项级数满足交换律.

证明 :设$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$为正项级数，$\{a_k'\}$为$\{a_k\}$的一个重排，则对任意n，总有$\sum_{k=1}^{n} a_k'\le\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$，因而$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k'\le\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$. 但$\{a_k\}$也是$\{a_k'\}$的重排，因而$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k\le\sum_{k=1}^{+\infty} a_k'$，得$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k=\sum_{k=1}^{+\infty} a_k'$.

对于一般的级数$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$，令

$$a_k^+=\max\{a_k,0\},\quad a_k^-=\min\{a_k,0\}.$$

则$a_k=a_k^++a_k^-,|a_k|=a_k^+-a_k^-$. 但$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^+$和$-\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^-$都是正项级数，因而其或者收敛，或者为$+\infty$.

如果$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^+$和$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^-$都收敛，则显然$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k=\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^++\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^-$以及$\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|=\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^+-\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^-$都收敛，即$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$绝对收敛. 反之也成立.

因正项级数$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^+$和$-\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^-$满足交换律，因而我们得到

定理 3. 5. 2：绝对收敛的级数满足交换律.

如果$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^+$和$-\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^-$中一个为有限，一个为无穷，则$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$也为相同的无穷，其任意重排所得的和也是相同的无穷.

如果$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$条件收敛，则必须$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^+=+\infty,\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^-=-\infty$，因此$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$是$\infty-\infty$型不定

式的极限，其不满足交换律.

Riemann 定理：如果 $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ **是条件收敛的级数，则** $\forall B \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$，**存在** $\{a_k\}$ **的一个重排** $\{a_k'\}$，**使得** $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k' = B$.

证明：设 $B \in \mathbf{R},\ B > 0$，**由** $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^+ = +\infty$，**因此存在** $a_1^+, \cdots, a_{p_1}^+$，**使得**

$$a_1^+ + a_2^+ + \cdots + a_{p_1-1}^+ \le B \le a_1^+ + a_2^+ + \cdots + a_{p_1}^+ .$$

取 $a_1^-, \cdots, a_{q_1}^-$，**使**

$$\begin{aligned}&\left(a_1^+ + a_2^+ + \cdots + a_{p_1}^+\right) + \left(a_1^- + a_2^- + \cdots + a_{q_1-1}^-\right)\\ &\ge B > \left(a_1^+ + a_2^+ + \cdots + a_{p_1}^+\right) + \left(a_1^- + a_2^- + \cdots + a_{q_1}^-\right).\end{aligned}$$

再取 $a_{p_1+1}^+, \cdots, a_{p_2}^+$，**使得**

$$\begin{aligned}&\left(a_1^+ + \cdots + a_{p_1}^+\right) + \left(a_1^- + \cdots + a_{q_1}^-\right) + \left(a_{p_1+1}^+ + \cdots + a_{p_2-1}^+\right) \le B\\ &< \left(a_1^+ + \cdots + a_{p_1}^+\right) + \left(a_1^- + \cdots + a_{q_1}^-\right) + \left(a_{p_1+1}^+ + \cdots + a_{p_2}^+\right).\end{aligned}$$

以此类推，不断加入 a_k^+, a_k^- **构成** $\{a_k\}$ **的一个重排，其构成级数的部分和总在** $\left(B + a_{p_k}^-, B + a_{p_k}^+\right)$ **内. 但已知** $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ **收敛，因而** $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$，**得** $k \to +\infty$ **时，所得的级数收敛到** B.

如果 $B = +\infty$，**先取** $a_1^+, \cdots, a_{p_1}^+$，**使** $a_1^+ + a_2^+ + \cdots + a_{p_1}^+ \ge 1$；**再取** $a_{p_1+1}^+, \cdots, a_{p_2}^+$，**使得** $\left(a_1^+ + \cdots + a_{p_1}^+\right) + a_1^- + \left(a_{p_1+1}^+ + \cdots + a_{p_2}^+\right) > 2$；**取** $a_{p_2+1}^+, \cdots, a_{p_3}^+$，**使** $\left(a_1^+ + \cdots + a_{p_1}^+\right) + a_1^- + \left(a_{p_1+1}^+ + \cdots + a_{p_2}^+\right) + a_2^- + \left(a_{p_21+1}^+ + \cdots + a_{p_3}^+\right) > 3$；

以此类推，则得到 $\{a_k\}$ **的一个重排，使其和为** $+\infty$.

分配律（级数的乘法）：设 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ **和** $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ **是两个给定的级数，如果以分配律将其逐项相乘，则得一** $\infty \times \infty$ **的矩阵**

$$\begin{matrix} a_0b_0 & a_0b_1 & a_0b_2 & \cdots \\ a_1b_0 & a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots \\ a_2b_0 & a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix}$$

问题是怎样将此 $\infty\times\infty$ 的矩阵中元素排成一级数？所排的级数是否收敛到 $\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty}b_n\right)$？对此有多种可能.

正方形排法：如图，令 $c_n=a_n\sum_{k=1}^{n}b_k+b_n\sum_{k=1}^{n-1}a_k$，则 $\sum_{n=0}^{+\infty}c_n$ 称为 $\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty}b_n\right)$ 的正方形排法.

$$\begin{matrix} a_0b_0 & a_0b_1 & a_0b_2 & \cdots \\ a_1b_0 & a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots \\ a_2b_0 & a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix}$$

如果 $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=0}^{+\infty}b_n$ 都收敛，则由 $\sum_{k=0}^{n}c_k=\left(\sum_{k=0}^{n}a_k\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{n}b_k\right)$，令 $n\to+\infty$，得 $\sum_{k=0}^{+\infty}c_k=\left(\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{+\infty}b_k\right)$，即 $\sum_{k=0}^{+\infty}a_k$ 和 $\sum_{k=0}^{+\infty}b_k$ 乘积的正方形排法收敛到 $\left(\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{+\infty}b_k\right)$.

如果 $\sum_{k=1}^{+\infty}a_k$ 和 $\sum_{k=1}^{+\infty}b_k$ 都是正项级数，则 $\{a_ib_j\}$ 构成的级数也是正项级数，由于正项级数满足交换律，因此其只要有一种排法是收敛的（例如正方形排法），则其任意排法都收敛到相同的和．因此正项级数乘积的任意排法都有和 $\left(\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{+\infty}b_k\right)$.

如果 $\sum_{k=1}^{+\infty}a_k$ 和 $\sum_{k=1}^{+\infty}b_k$ 都是绝对收敛的级数，则其可表示为收敛正项级数的差，因而其乘积可分解为收敛正项级数的乘积，其和与排法无关，总是收敛到 $\left(\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{+\infty}b_k\right)$.

如果 $\sum_{k=1}^{+\infty}a_k$ 和 $\sum_{k=1}^{+\infty}b_k$ 中有一个是条件收敛的，则由 Riemann 定理，其和与排法无关，因此其乘积的和显然与排法无关.

总结上面所得的结果我们可以看出，绝对收敛的级数是有限加法的推广，保持了有限加法的基本性质．条件收敛的级数是 $\infty-\infty$ 型不定式的极限，其和由正项和负项相互抵消所得，

不保持有限加法的基本性质.

对角线排法：**级数** $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ **和** $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ **是按** x^n **排成的级数，称为** x **的幂级数．如果将其乘积也按** x **的幂展开，则得**

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)x^n.$$

特别地，令 $x=1$，**则得**

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right).$$

级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)$ **称为级数乘积** $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$ **的对角线排法（见下图）**.

$$\begin{array}{cccc} a_0b_0 & a_0b_1 & a_0b_2 & \cdots \\ a_1b_0 & a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots \\ a_2b_0 & a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

定理 3. 5. 3：如果 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = A$ **和** $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = B$ **中有一个是绝对收敛的，则其按对角线排法所得的级数也是收敛的，并且其和为** $A\cdot B$.

证明：由于绝对收敛级数是两个收敛正项级数的差，不妨设 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = A$ **是收敛的正项级数．令** $b_m = B-(b_0+\cdots+b_m)$，**则** $b_m \to 0$，**而**

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{m}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) &= a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)+\cdots+(a_0b_m+\cdots+a_mb_0)\\ &= a_0(b_0+\cdots+b_m)+a_1(b_0+\cdots+b_{m-1})+\cdots+a_mb_0\\ &= a_0(B-b_m)+a_1(B-b_{m-1})+\cdots+a_mb_0\\ &= (a_0+\cdots+a_m)\cdot B-(a_0b_m+a_1b_{m-1}+\cdots+a_mb_0).\end{aligned}$$

令 $g_m = a_0b_m+a_1b_{m-1}+\cdots+a_mb_0$，**仅需证** $\lim_{m\to+\infty} g_m = 0$.

任给 $e>0$，**由** $\lim_{m\to+\infty} b_m = 0$ **知，** $\exists N$，**使** $m>N$ **时，** $|b_m|<\frac{e}{A}$．**因此** $m>N$ **时**

$$\begin{aligned}|g_m| &= a_0|b_m| + a_1|b_{m-1}| + \cdots + a_{m-N-1}|b_{N+1}| + a_{m-N}|b_N| + \cdots + a_m|b_0| \\ &\le (a_0 + a_1 + \cdots + a_{m-N-1})\frac{e}{A} + a_{m-N}|b_N| + \cdots + a_m|b_0| \\ &\le e + a_{m-N}|b_N| + \cdots + a_m|b_0|.\end{aligned}$$

令 $m \to +\infty$，由 $\lim\limits_{m\to+\infty} a_m = 0$，得 $\overline{\lim\limits_{m\to+\infty}}|g_m| \le e$．但 e 是任意的，因此得 $\overline{\lim\limits_{m\to+\infty}}|g_m| = 0$，即 $\lim\limits_{m\to+\infty} g_m = 0$．

§3. 6　无穷乘积

无穷级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ 是有限加法的推广．因此自然希望将有限乘法推广到无穷乘积.

设 $\{b_n\}$ 是给定的序列，定义 $\prod\limits_{i=1}^{+\infty} b_i = \lim\limits_{n\to+\infty}\prod\limits_{i=1}^{n} b_i$

如果 $\{b_n\}$ 中有一项为零，则不论其它项怎样选取，总有 $\prod\limits_{i=1}^{+\infty} b_i = 0$．因此不能对序列 $\{b_n\}$ 给出有规律的结果．所以一般不考虑 $\prod\limits_{i=1}^{+\infty} b_i = 0$ 的情况.

定义 3. 4. 1：无穷乘积 $\prod\limits_{i=1}^{+\infty} b_i$ 称为收敛的，如果其部分积 $P_n = \prod\limits_{i=1}^{n} b_i$ 有异于零的有限极限．反之则称 $\prod\limits_{i=1}^{+\infty} b_i$ 发散.

定理 3. 4. 2：如果 $\prod\limits_{i=1}^{+\infty} b_i$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 1$.

证明：$b_n = \prod\limits_{i=1}^{n} b_i \Big/ \prod\limits_{i=1}^{n-1} b_i = \dfrac{P_n}{P_{n-1}}$，因此 $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \dfrac{\lim\limits_{n\to+\infty} P_n}{\lim\limits_{n\to+\infty} P_{n-1}} = 1$.

由于改变无穷乘积 $\prod\limits_{i=1}^{+\infty} b_i$ 的有限项不影响其收敛性，因此在讨论 $\prod\limits_{i=1}^{+\infty} b_i$ 时总可假定 $b_i > 0$．这时对无穷乘积取对数，将乘法变为加法.

定理 3. 4. 3：无穷乘积 $\prod\limits_{i=1}^{+\infty} b_i$ 收敛的充分必要条件是无穷级数 $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \ln b_i$ 收敛．这时

$\prod_{i=1}^{+\infty} b_i = e^{\sum_{i=1}^{+\infty}\ln b_i}$，即$\ln\left(\prod_{i=1}^{+\infty} b_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty}\ln b_i$.

证明：$\ln\left(\prod_{i=1}^{n} b_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\ln b_i$，$\prod_{i=1}^{n} b_i = e^{\sum_{i=1}^{n}\ln b_i}$，**而**$y = e^x$，$y = \ln x$ **都是连续函数，因此** $\sum_{i=1}^{+\infty}\ln b_i$ **和** $\prod_{i=1}^{+\infty} b_i$ **中有一个收敛，则另一个也收敛，并满足所给的等式.**

利用此定理，无穷乘积 $\prod_{i=1}^{+\infty} b_i$ **可以转化为无穷级数** $\sum_{i=1}^{+\infty}\ln b_i$. **因而可利用无穷级数的手段进行研究.**

习题

1. **求下列级数的和：**

（1）$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{4k^2-1}$；（2）$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$；

（3）$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$；（4）$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k(k+2)}$；

（5）$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})}$；（6）$\sum_{k=1}^{+\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{2k^2}$.

2．**设** $\lim_{n\to+\infty} na_n = a \neq 0$. **求证：**$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ **发散.**

3．**求下列级数的和：**

（1）$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$；（2）$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n-1}{2^n}$；

（3）$r\sin q + r^2\sin 2q + \cdots + r^n \sin nq + \cdots,\qquad |r|<1$；

（4）$\frac{1}{2} + r\cos q + r^2\cos 2q + \cdots + r^n\cos nq + \cdots,\qquad |r|<1$.

4．**判断级数的收敛性：**

（1）$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\ln n}}$；（2）$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\ln n^{\ln n}}$.

5．**判断下列级数的收敛性：**

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\ln n}{2^n}$；(2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n-1}{2}}}$；

(3) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!2^n}{n^n}$；(4) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!3^n}{n^n}$；

(5) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!2^n}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$；(6) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n}{1+a^{2n}}$；($a>0$)

(7) $\frac{3}{1}+\frac{3\cdot 5}{1\cdot 4}+\frac{3\cdot 5\cdot 7}{1\cdot 4\cdot 7}+\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10}+\cdots$.

6．用哥西判别法证明

$$\sum_{n=1}^{+\infty}2^{-n-(-1)^n}$$

收敛，并说明达郎倍尔判别法对此级数失效.

7．设 $a_n>0$，且 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le r<1\ (n=1,2,\cdots)$. 求证：用 $\sum_{k=1}^{n}a_k$ 近似代替 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 的误差小于

$\frac{ra_n}{1-r}$.

8．用积分判别法判别下列级数的收敛性：

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3^{\sqrt{n}}}$；(2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{3^{\sqrt{n}}}$；

(3) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{\ln n}}$；(4) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3^{\ln n}}$；

9．若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\ \ (a_n>0)$ 发散，而 S_n 表示级数的第 n 部分和. 求证：级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n}$ 也发散.

提示：用收敛原理.

10．若正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛，$a_{n+1}\le a_n\ (n=1,2,\cdots)$. 求证：$\lim_{n\to+\infty}n\cdot a_n=0$.

11．利用拉阿伯判别法研究下列级数的收敛性：

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p$ （p 实数）；

(2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}\frac{1}{n^b}\ \ (a>0,b>0)$.

12．不用哥西准则，求证：如果$\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|$收敛，则$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 也收敛.

13．证明：若级数$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ （A）及级数$\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ （B）皆收敛，且

$$a_n \le c_n \le b_n \quad (n=1,2,\cdots),$$

则级数$\sum_{n=1}^{+\infty}c_n$ (C)也收敛. 若级数（A）及级数（B）皆发散，问级数(C)的收敛性如何？

14．求证：若级数$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n^2$ 及级数$\sum_{n=1}^{+\infty}b_n^2$ 收敛，则级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}|a_nb_n|,\ \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n+b_n)^2,\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|a_n|}{n}$$

也收敛.

15．判别下列级数的收敛性：

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+100}$；(2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln n}{n}\sin\frac{np}{2}$；

(3) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}$；(4) $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$；

(5) $\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\left(p\sqrt{n^2+1}\right)$；(6) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{3^n}$；

(7) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$；($p>0$)；(8) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3^n}\sin\frac{np}{2}$；

(9) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\cos 2n}{n}$；(10) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}$；

(11) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}+\cdots$.

16．设$b_n>0$，且

$$\lim_{n\to+\infty}n\left(\frac{b_n}{b_{n+1}}-1\right)>0.$$

求证：级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}b_n$ **收敛.**

17．**利用上一题讨论下列级数的收敛性：**

（1） $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p$ ；

（2） $1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}$.

18．**对序列** $\{a_k\}$，$\{b_k\}$ **定义** $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，$\Delta b_k=b_{k+1}-b_k$. **求证：**

（1）**如果** $\{S_n\}$ **有界，** $\sum_{k=1}^{+\infty}\left|\Delta b_k\right|$ **收敛，且** $b_n\to 0(n\to+\infty)$，**则** $\sum_{k=1}^{+\infty}a_k b_k$ **收敛，且有**

$$\sum_{k=1}^{+\infty}a_k b_k=-\sum_{k=1}^{+\infty}S_k\Delta b_k \text{ ；}$$

（2）**如果** $\sum_{k=1}^{+\infty}a_k$ **与** $\sum_{k=1}^{+\infty}\left|\Delta b_k\right|$ **都收敛，则** $\sum_{k=1}^{+\infty}a_k b_k$ **收敛.**

19．**研究下列级数的收敛性与绝对收敛性：**

（1） $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ （$p>0$）；（2） $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^p+\frac{1}{n}}$ （$p>0$）；

（3） $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\left[n+(-1)^n\right]^p}$ （$p>0$）；（4） $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{\left[\sqrt{n}\right]}}{n^p}$ （$p>0$）；

（5） $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n\sin^{2n}x}{n}$ ；（6） $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{a_n}\right)^n$，$\lim_{n\to+\infty}a_n=a>0$ ；

（7） $1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{(-1)^n}{2n+1}$ ；（8） $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$ （$x>0$）；

（9） $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n r^{n+\sqrt{n}}$ （$r>0$）；（10） $\sum_{n=1}^{+\infty}n!\left(\frac{x}{n}\right)^n$ ；

20．**求证：若将收敛级数的各项重新排列，而使每一项离开原有的位置不超过** m **个位置（** m **为预先给定的数），则其和不变.**

21．**已知** $H_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=c+\ln n+r_n$，$c$ **为欧拉常数，** $\lim_{n\to+\infty}r_n=0$. **求证：**

（1） $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2m}=\frac{1}{2}\ln m+\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}r_m$ ；

（2）若把级数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

的各项重新安排，而使挨次 p 个正项的一组与挨次 p 个负项的一组相交替，则新级数的和为

$$\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}.$$

22．求级数

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right)^3,\quad |x|<1$$

的和.

23．令 $e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$．求证：$e^{x+y}=e^x\cdot e^y$．

24．设 $\lim_{n\to+\infty}a_n=l$．求证：

（1） 当 $l>1$ 时，$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{a_n}}$ 收敛；

（2） 当 $l<1$ 时，$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{a_n}}$ 发散；

并问 $l=1$ 时会有什么结论？