考试科目：（861）高等代数　　　　共2页

★★★★ 答题一律做在答题纸上，做在试卷上无效。★★★★

一、填空题（每小题6分，共60分）

1、设a,b,c是方程$x^3+px+q=0$的三个根，那么行列式$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}=$______；

2、设A,B均为n阶正交矩阵，且$|A|=-|B|$，则行列式$|A+B|$的值为 ______；

3、已知n阶方阵A和n阶单位阵E满足$2A(A-E)=A^3$，则 $(E-A)^{-1}=$______；

4、当$\lambda=$______时，方程组$\begin{cases} 2x_1+\lambda x_2-x_3=1, \\ \lambda x_1-x_2+x_3=2, \\ 4x_1+5x_2-5x_3=-1. \end{cases}$ 无解；

5、设A为4阶方阵，A^*为A的伴随矩阵，且A的秩$R(A)=2$，则A^*的秩$R(A^*)=$ ______；

6、二次型$f(x_1,x_2,x_3)=-x_1^2-4x_2^2-2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3$的秩为______；

7、设三阶矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$，向量$\vec{\alpha}=\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，若$A\vec{\alpha}$与$\vec{\alpha}$线性相关，则$a=$______；

8、已知n阶方阵A的n个特征值分别为$2,4,6,\cdots,2n$，E为n阶单位阵，

则行列式$|A-3E|=$______；

9、实数域上全体3阶上三角矩阵对于矩阵加法和数乘运算构成的线性空间是______维的；

10、已知三维线性空间V上的线性变换T在基$\vec{\alpha_1},\vec{\alpha_2},\vec{\alpha_3}$下的矩阵为$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，那么

线性变换T在基$\vec{\alpha_1}+\vec{\alpha_2},\vec{\alpha_2},\vec{\alpha_3}$下的矩阵为

______。

二、（15分）证明：已知n维向量组$\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\cdots,\overrightarrow{\alpha_r}$可以由向量组$\overrightarrow{\beta_1},\overrightarrow{\beta_2},\cdots,\overrightarrow{\beta_s}$线性表示，这里$r>s$，

证明：向量组$\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\cdots,\overrightarrow{\alpha_r}$一定线性相关。

三、（15分）已知n阶方阵A满足$A^2-3A+2E=0$，证明：矩阵A相似于对角矩阵。

四、（20分）已知实对称阵A的顺序主子式全大于或等于零，证明：A是半正定的。

五、（20分）证明：n维欧氏空间中任意一个正交向量组都可以扩充为一组标准正交基。

六、（20分）设实数域上n阶矩阵

$$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

（1） 如果$|a_{ii}|>\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|(i,j=1,2,\cdots,n)$，证明$A$的行列式$|A|\neq 0$；

（2）如果$a_{ii}>\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|(i,j=1,2,\cdots,n)$，证明$A$的行列式$|A|>0$.